ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

HÌNH HỌC 11

ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM 2017 - 2018

VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD. A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ *cuøng phöông* $(\vec{a}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (k ≠ 1), O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB};\quad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})=\widehat{BAC}\ (0^0\le \widehat{BAC}\le 180^0)$$

• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoaëc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

4. Các dạng toán thường gặp:

a) Chứng minh đẳng thức vec tơ.

b) Chứng minh ba vec tơ đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng, phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng.

+ Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Nếu có m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

+ Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

c) Tính tích vô hướng cuả hai véc tơ trong không gian

d) Tính độ dài của đoạn thẳng, véctơ.

+ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích $\overrightarrow{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$
- Khi đó $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$

$$= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn\cos(\vec{a},\vec{b}) + 2np\cos(\vec{b},\vec{c}) + 2mp\cos(\vec{c},\vec{a})}$$

e) Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.

Sử dụng các kết quả

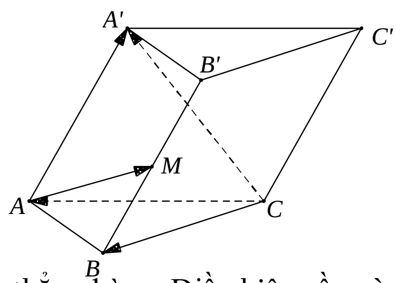
- A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{DC}$
- A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$.

B – BÀI TẬP

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Ta phân tích như sau:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$

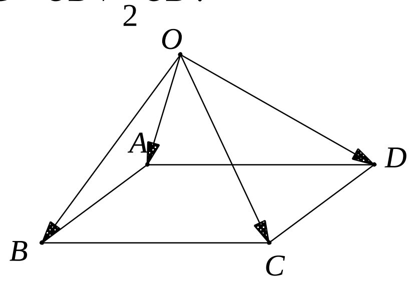
$= \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 2: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. **D.** $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn B.

Trước hết, điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình bình hành là:

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

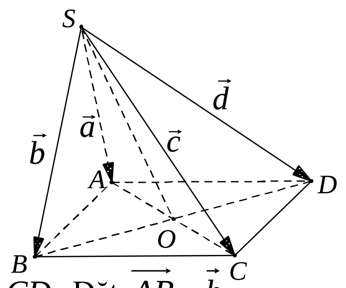
Với mọi điểm O bất kì khác A, B, C, D, ta có:

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$. **C.** $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.



Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta phân tích như sau:

$\begin{cases} \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO} \end{cases}$ (do tính chất của đường trung tuyến)

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

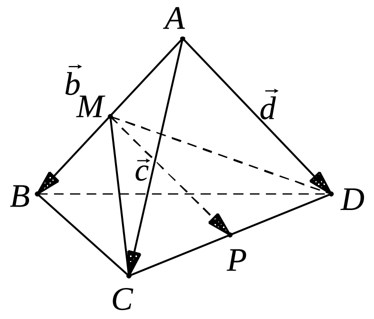
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta phân tích:

$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (tính chất đường trung tuyến)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-2\overrightarrow{AM}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

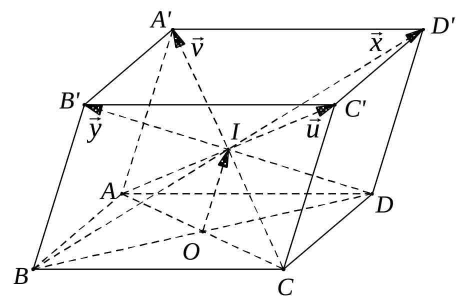
Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta phân tích:

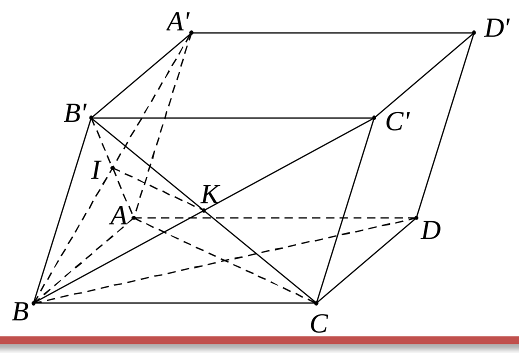
$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}\right)=2\overrightarrow{AA'}$.

$\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}\right)=2\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}=4\overrightarrow{AA'}=-4\overrightarrow{A'A}=-4.2\overrightarrow{OI}$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

B. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$.

D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

A đúng do tính chất đường trung bình trong $\Delta B'AC$ và tính chất của hình bình hành $ACC'A'$.

B đúng do $IK // AC$ nên bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng.

C đúng do việc ta phân tích:

$\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$.

D sai do giá của ba vectơ $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{B'C'}$ đều song song hoặc trùng với mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, theo định nghĩa sự đồng phẳng của các vectơ, ba vectơ trên đồng phẳng.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$". Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD).

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD.

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC.

D. Chưa thể xác định được.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

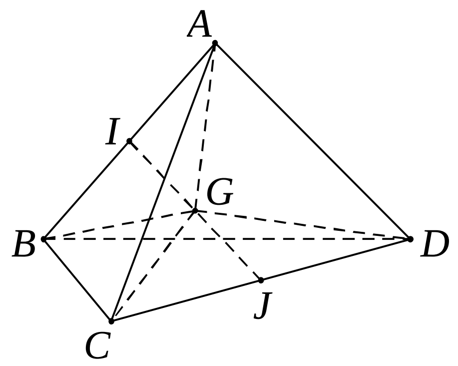
Ta gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và CD.

Từ giả thiết, ta biến đổi như sau:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

$\Rightarrow G$ là trung điểm đoạn IJ.

Bằng việc chứng minh tương tự, ta có thể chứng minh được phương án B và C đều là các phương án đúng, do đó **phương án D sai**.



Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

B. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

D. $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

Hướng dẫn giải:

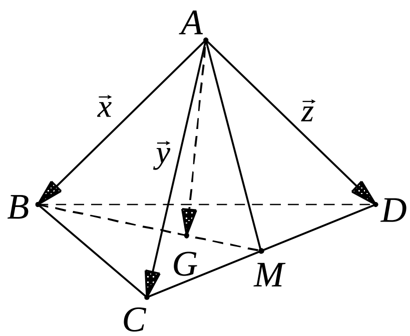
Chọn A.

Gọi M là trung điểm CD.

Ta phân tích:

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.



Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$. **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm BB'. **D.** M là trung điểm CC'.

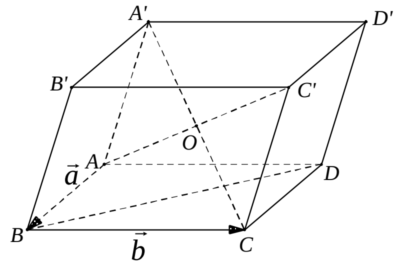
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta phân tích:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BB'.



Câu 10: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}; \vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b}; \vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y};\vec{z}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.
C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{z}$ cùng phương. **D.** Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

+ Nhận thấy: $\vec{y}=-2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x};\vec{y}$ cùng phương.

Câu 11: Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
C. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
D. Nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

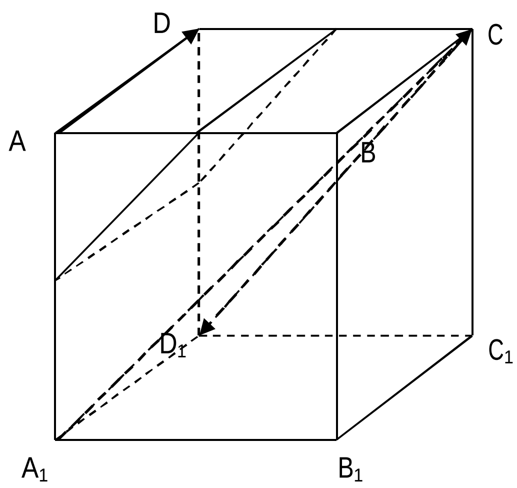
Hướng dẫn giải:

Chọn **C.**

$+M,N,P,Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ AA_1,DD_1,CD$.

Ta có $CD_1//(MNPQ)$; $AD//\left(MNPQ\right)$; $A_1C//(MNPQ)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.



Câu 13: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.
B. Hai vectơ $\vec{x};\vec{a}$ cùng phương.
C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{b}$ cùng phương.
D. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\vec{y}=\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{z}\right)$ nên ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

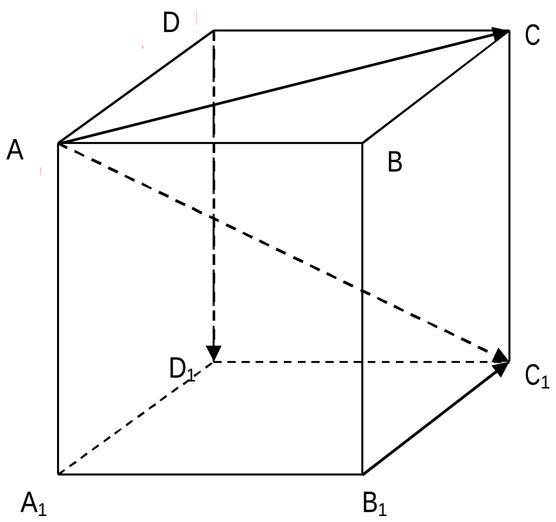
A. $k=4$. **B.** $k=1$. **C.** $k=0$. **D.** $k=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

+ Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

Nên $k=1$.



Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.
D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

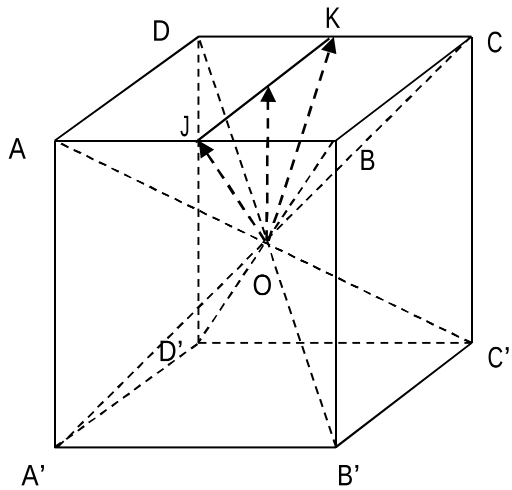
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

+ Gọi J,K lần lượt là trung điểm của AB,CD.

+Ta có:

$2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$



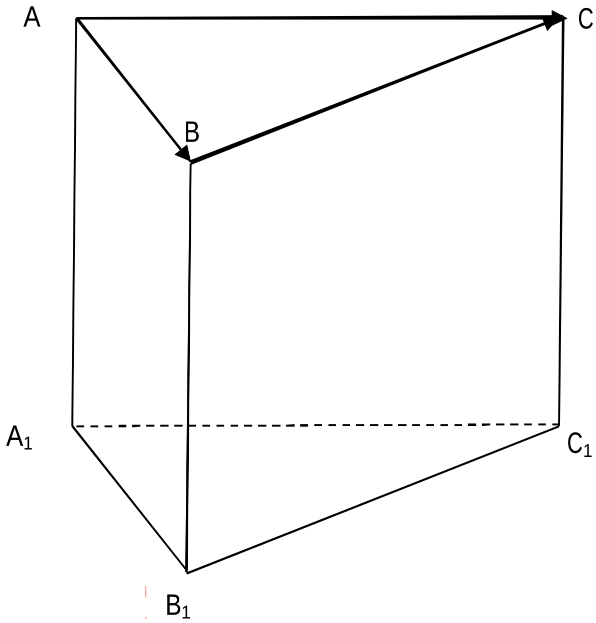
Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0} \Rightarrow \vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}$.



Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

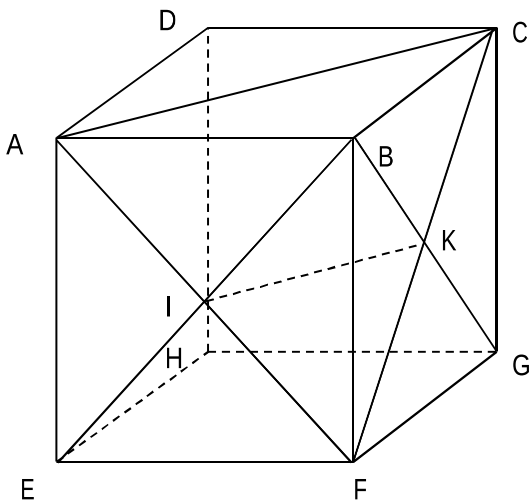
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

+ $\begin{cases} IK // (ABCD) \\ GF // (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

+ Các bộ véctơ ở câu A, C, D không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng.



Câu 18: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.

B. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng.

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

+ Nắm vững khái niệm ba véctơ đồng phẳng.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

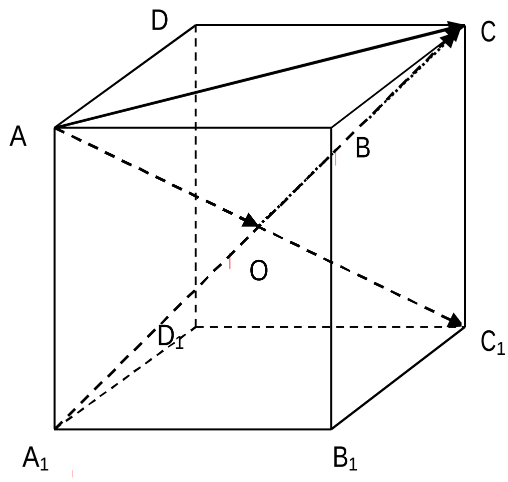
C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$. **D.** $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

+ Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

+ Vận dụng công thức trung điểm để kiểm tra.



Câu 20: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{O}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

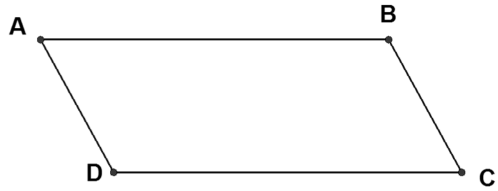
D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. $\Leftrightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành



Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

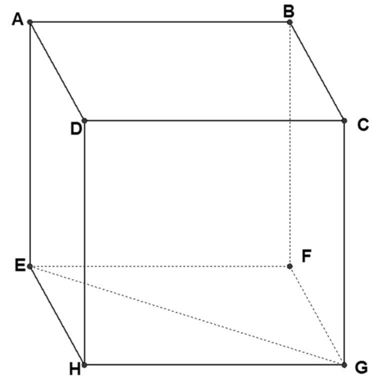
A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $(\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD})=a^2$ (Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$)



Câu 22: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Câu 23: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng
B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$
C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc $(B'AC)$

B. Đúng vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow$ ba véctơ đồng phẳng.

D. Đúng vì theo câu C $\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'}=2\overrightarrow{BC}$.

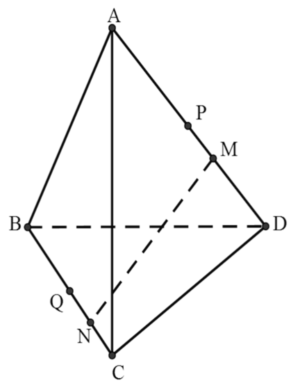
Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. Các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
C. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
D. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Chọn A.

A. Sai vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.



B. Đúng vì

$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$: đồng phẳng.

C. Đúng. Bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên ta có $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

D. Đúng. Biểu diễn giống đáp án A ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$. **D.** $AB\perp CD$ hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC, BCD, CDA, ABD là các tam giác đều.

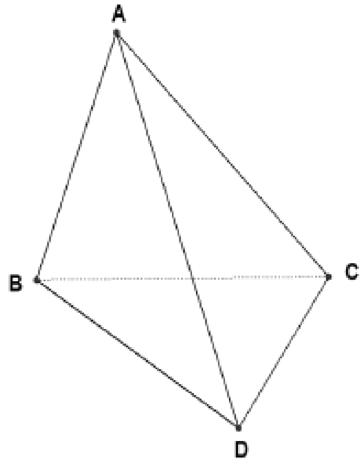
A. Đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

B. Đúng vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-a.a.\cos 60^0=\frac{-a^2}{2}$.

C. Sai vì

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-a.a.\cos 60^0=-\frac{a^2}{2}$.

D. Đúng vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.



Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

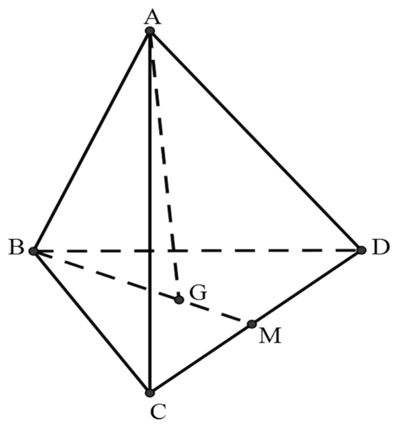
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi M là trung điểm BC.

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$

$=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.



Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD. Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

A. Sai vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$

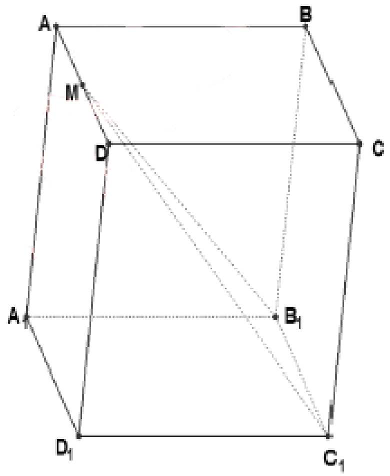
B. Đúng vì

$\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

C. Sai. theo câu B suy ra

D. Đúng vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD_1}$.



Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Hướng dẫn giải:

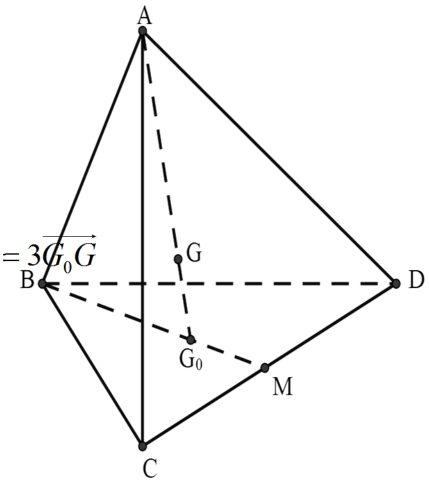
Chọn C.

Theo đề: G_O là giao điểm của GA và mp (BCD) $\Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD.

$\Rightarrow \overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=-\left(3\overrightarrow{GG_0}+\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}\right)=-3\overrightarrow{GG_0}=3\overrightarrow{G_0G}$



Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

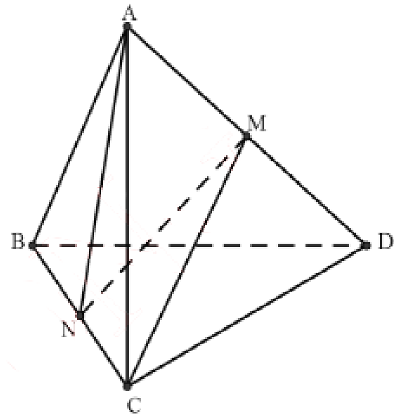
Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

B. Đúng vì từ N ta dựng véctơ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ thì $\overrightarrow{MN}$ không nằm trong mặt phẳng (ABC).

C. Sai. Tương tự đáp án B thì $\overrightarrow{AN}$ không nằm trong mặt phẳng (CMN).

D. Đúng vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.



Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$". Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC

D. Chưa thể xác định được.

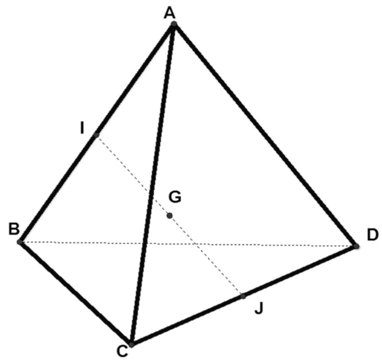
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

G là trung điểm IJ nên đáp án A đúng

Tương tự cho đáp án B và C cũng đúng.



Câu 31: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

Mà $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 32: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .

C. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

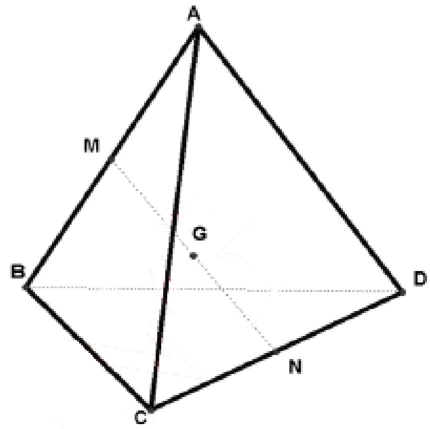
D. Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$

Suy ra: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.



Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN theo quy tắc trung điểm :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN};\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây:

A. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$

D. $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.

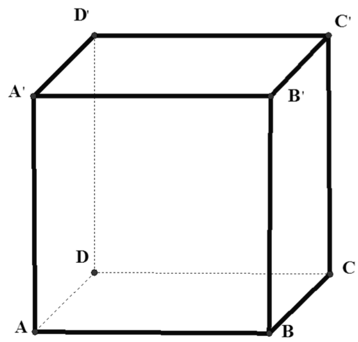
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'A'}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (vô lí)



Câu 35: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Câu 36: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c};\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c};\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Các vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n:\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$

Mà : $\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$

$$\Leftrightarrow \vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}=m\left(3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right)+n\left(2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}3m+2n=1\\-3m-3n=-2\\2m-3n=4\end{cases}$$ (hệ vô nghiệm)

Vậy không tồn tại hai số $m,n:\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. G, S, O không thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$

D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

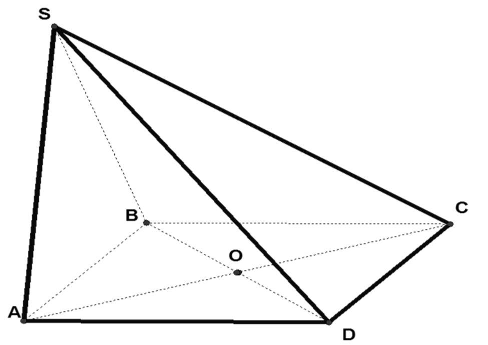
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$



Câu 38: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

B. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

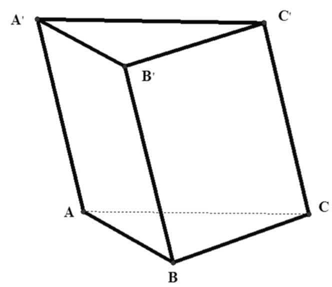
C. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.



Câu 39: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

G là trọng tâm tứ diện $ABCD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (quy tắc trung điểm) $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (vì M là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Câu 41: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng qui.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Theo giả thuyết $m+n+p\neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m\neq 0$. Từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{p}{m}\vec{c}$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba véctơ).

Câu 42: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

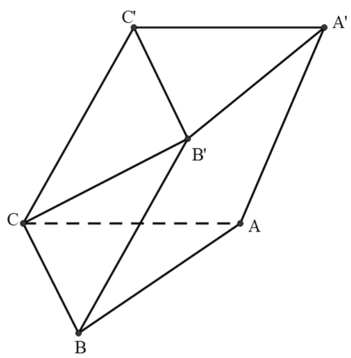
A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}$ (qt hình bình hành)

$=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.



Câu 43: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **đúng**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

B. Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

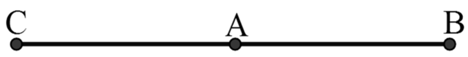
C. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

A. Sai vì $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow A$ là trung điểm BC.



B. Sai vì $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\ \overrightarrow{CB}=-4\overrightarrow{AC}$.

C. Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

D. Sai vì $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{CA}$ (nhân 2 vế cho -1).

Câu 44: Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véctơ đó cùng phương.

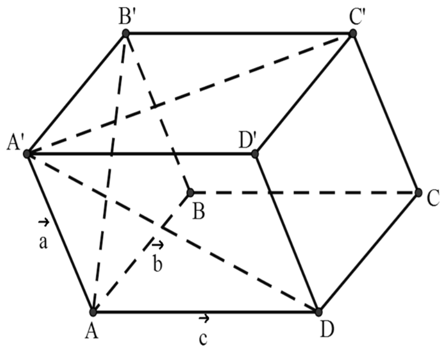
B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véctơ đó bằng véctơ $\vec{0}$.

C. véctơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véctơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

C. Sai

D. Đúng vì $\begin{cases}\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{c}\\ \overrightarrow{AB'}=\vec{a}+\vec{b}\\ \overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}=-\vec{b}-\vec{c}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{DA'}-\overrightarrow{CA}\Rightarrow 3$

vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 45: Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng:

A. a^2. **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

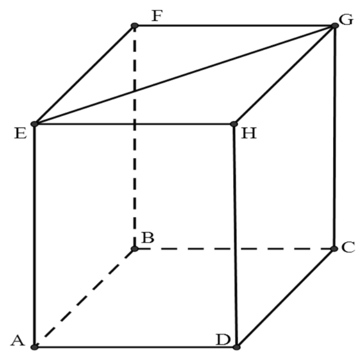
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)$

$=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AE}+EF^2+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FB}$

$=0+a^2+0+0+0+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EA}=a^2+0=a^2$



Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

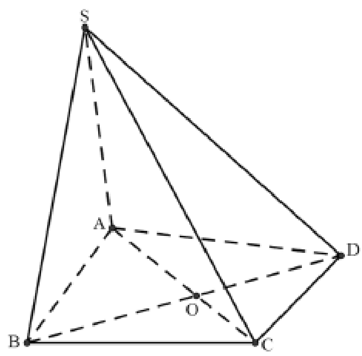
B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Vì O,A,C và O,B,D thẳng hàng nên đặt $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC};OB=m\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OC}+(m+1)\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Mà $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ không cùng phương nên $k=-2$ và $m=-2$ $\Rightarrow$

$\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=2\Rightarrow AB//CD.$

B. Đúng. Hs tự biến đổi bằng cách chêm điểm O vào vế trái.

C. Sai. Vì nếu $ABCD$ là hình thang cân có 2 đáy là AD,BC thì sẽ sai.

D. Đúng. Tương tự đáp án A với $k=-1,m=-1\Rightarrow O$ là trung điểm 2 đường chéo.

Câu 47: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

B. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.

C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.\right)$

D. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

A Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

B. Đúng

C. Đúng vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}$

Mà $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (vì I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

D. Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. M là trung điểm BB'. **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$. **D.** M là trung điểm CC'.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

A. M là trung điểm BB' $\Rightarrow 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{BD'}\right)$ (quy tắc trung điểm).

$= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B'B} + \vec{b} - \vec{a} + \overrightarrow{BB'} + \vec{b} - \vec{a}\right)$ (quy tắc hình hộp) $= -\frac{1}{2}\left(-2\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{b}$.

Câu 49: Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kỳ không thuộc đường thẳng AB. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA}$.
C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$.
D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

A. Sai vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ (I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow O, M, I$ thẳng hàng.
B. Sai vì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow M \equiv B$ và $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow O, B, A$ thẳng hàng: vô lý
C. $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} \Rightarrow B, A, M$ thẳng hàng.
D. Sai vì $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow O, B, A$ thẳng hàng: vô lý.

Câu 50: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI} = k\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k = 4$. **B.** $k = \frac{1}{2}$. **C.** $k = \frac{1}{4}$. **D.** $k = 2$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PN}$

nên $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PN} = 2(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = 2.2.\overrightarrow{PI} = 4\overrightarrow{PI}$. Vậy $k = \frac{1}{4}$

Câu 51: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai?**

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$. **B.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$. **D.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.

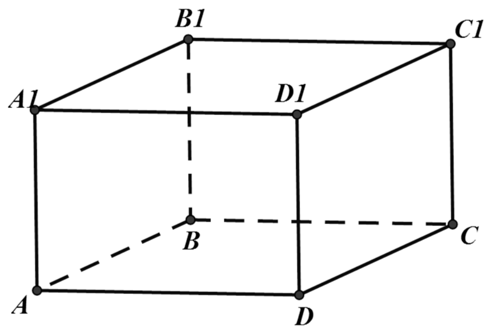
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có :

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1} \neq \overrightarrow{BC}$ nên D sai.

Do $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1}$ nên $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$. A đúng



Do $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$ nên B đúng.

Do $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD_1}$ nên C đúng.

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $P,\ Q$ là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$

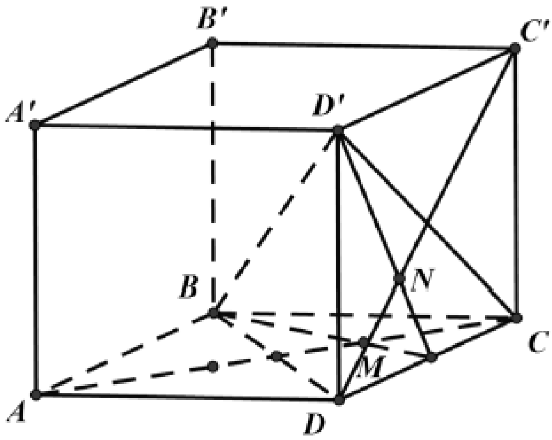
nên $2\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DQ}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$. Vậy $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC=3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D=C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN//D'$.

A. $x=\frac{2}{3}$. **B.** $x=\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{1}{4}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn A.



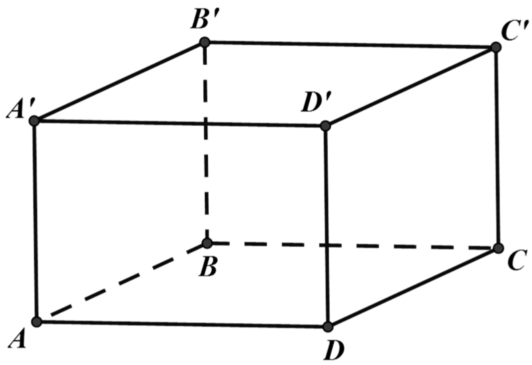
Câu 54: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$ nên $k=1$



Câu 55: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

B. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ đồng phẳng.

C. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn NP.

D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải: :

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ đúng với mọi điểm A,B,C,D nên câu B sai.

Câu 56: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá thuộc một mặt phẳng

B. Ba tia Ox,Oy,Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

C. Cho hai véctơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m,n là duy nhất.

D. Nếu có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ và một trong ba số m,n,p khác 0 thì ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải: :

Chọn A.

Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá song song hoặc thuộc một mặt phẳng.
Câu A sai

Câu 57: Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

A. $k=2$. **B.** $k=4$. **C.** $k=1$. **D.** $k=0$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn C.

Ta chứng minh được $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên $k=1$

Câu 58: Cho ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. Nếu $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ ta suy ra $m=n=p=0$.

B. Nếu có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$, trong đó $m^2+n^2+p^2>0$ thì $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Với ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ thì $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng.

D. Nếu giá của $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải: :

Chọn D.

Câu D sai. Ví dụ phản chứng 3 cạnh của hình chóp tam giác đồng qui tại 1 đỉnh nhưng chúng không đồng phẳng.

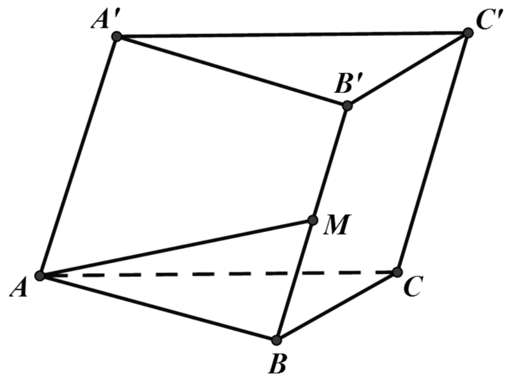
Câu 59: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Hướng dẫn giải: :

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$



Câu 60: Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào đúng.

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=0$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Câu 61: Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC. Đẳng thức đúng là.

A. $6\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. **B.** $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

C. $\overrightarrow{SI}=3\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SI}\Leftrightarrow\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Câu 62: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ với m,n là các số duy nhất.

C. Ba véctơ không đồng phẳng khi có $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì.

D. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu A sai vì ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.

Câu B sai vì thiếu điều kiện 2 véctơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương.

Câu C sai vì $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì không phải là điều kiện để 3 véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 63: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=4$. **D.** $k=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với $k=1$ ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+1.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABC$ Lấy các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các tia SA,SB,SC sao cho $SA=a.SA',SB=b.SB',SC=c.SC'$, trong đó a,b,c là các số thay đổi. Tìm mối liên hệ giữa a,b,c để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

A. $a+b+c=3$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Nếu $a=b=c=1$ thì $SA=SA',SB=SB',SC=SC'$ nên $(ABC)\equiv(A'B'C')$.

Suy ra $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow a+b+c=3$ là đáp án đúng.

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$. **B.** $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}=\vec{0}$. **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Ta có: $\begin{cases}\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \vec{b}+\vec{d}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases} \Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$

Câu 66: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo giả thuyết trên thì với O là một điểm bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Ta thay điểm O bởi điểm A thì ta có:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Do vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ là sai.

Câu 67: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức **sai.**

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}$ mà $\overrightarrow{AB_1}\neq\overrightarrow{AD_1}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$ sai.

Câu 68: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$. **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$. **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{MP}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 69: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.
B. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có 3 véctơ $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì chúng có giá cùng nằm trên mặt phẳng $\left(BCD_1A_1\right)$.

Câu 70: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB};\ \vec{y}=\overrightarrow{AC};\ \vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
B. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
D. $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG};\ \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG};\ \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.
B. Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$.
D. Nếu $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đáp án **C** sai do nếu $ABCD$ là hình thang có 2 đáy lần lượt là AD và BC thì ta có $\overrightarrow{SD}+2\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SA}$.

Câu 72: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

A. $k=3$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}$

Mà M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB};\ \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{CN}$

Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Câu 73: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.   **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

Câu 74: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=\frac{1}{3}$.   **B.** $k=2$.   **C.** $k=3$.   **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Chứng minh tương tự câu 61 ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

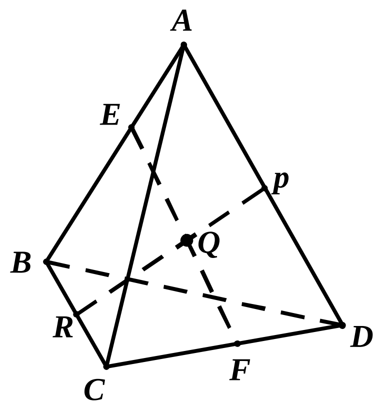
Câu 75: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F là các điểm thỏa nãm $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ còn P,Q,R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA}=l\overrightarrow{PD},\overrightarrow{QE}=l\overrightarrow{QF},\overrightarrow{RB}=l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P,Q,R thẳng hàng.Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. P, Q, R thẳng hàng   **B.** P, Q, R không đồng phẳng

C. P, Q, R không thẳng hàng   **D.** Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FQ}$ (2)

Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ}=l\overrightarrow{PD}+l\overrightarrow{DF}+l\overrightarrow{FQ}$ (3)

Lấy $(1)-(3)$ theo vế ta có

$(1-l)\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AE}-l\overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

Tương tự $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ nên

$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}=\frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC}=-k\overrightarrow{QR}$

Vậy P,Q,R thẳng hàng.

Câu 76: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD, G là trung điểm của IJ.

a) Giả sử $a.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ thì giá trị của a là?

A. 2   **B.** 1   **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$

b) Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{IJ}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{JI}$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{JI}$

c) Xác định vị trí của M để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

A. Trung điểm AB **B.** Trùng với G **C.** Trung điểm AC **D.** Trung điểm CD

Hướng dẫn giải:

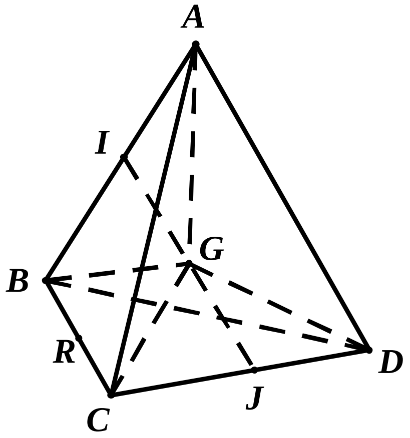
a) $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}\right)=\vec{0}$.

c) Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nên

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv G$.



Câu 77: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M,N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN\parallel BD'$. Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$ bằng?

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{2}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$.

Dễ dàng có các biểu diễn $\overrightarrow{BM}=(1-x)\vec{a}+x\vec{b}$ và $\overrightarrow{BN}=(1-y)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$.

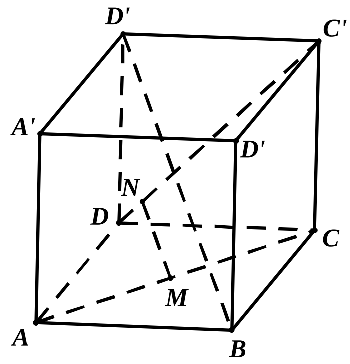
Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}$ (1)

Để $MN\parallel BD'$ thì $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+y\vec{c}=z\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

$\Leftrightarrow (x-y-z)\vec{a}+(1-x-z)\vec{b}+(y-z)\vec{c}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z=0\\1-x-z=0\\y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$.



Vậy các điểm M,N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$.

Ta cũng có $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD'}\Rightarrow\dfrac{MN}{BD'}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 78: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{B'A'D'}=60^0,\widehat{B'A'A}=\widehat{D'A'A}=120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với $A'D$; AC' với $B'D$.

A. $\left(\widehat{AB,A'D}\right)=60^0;\left(\widehat{AC',B'D}\right)=90^0$ **B.** $\left(\widehat{AB,A'D}\right)=50^0;\left(\widehat{AC',B'D}\right)=90^0$

C. $\left(\widehat{AB,A'D}\right)=40^0;\left(\widehat{AC',B'D}\right)=90^0$ **D.** $\left(\widehat{AB,A'D}\right)=30^0;\left(\widehat{AC',B'D}\right)=90^0$

b) Tính diện tích các tứ giác $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

A. $S_{A'B'CD}=a^2\sqrt{3};S_{AA'C'C}=a^2\sqrt{2}$ **B.** $S_{A'B'CD}=a^2;S_{AA'C'C}=a^2 2\sqrt{2}$

C. $S_{A'B'CD}=\frac{1}{2}a^2;S_{AA'C'C}=2a^2\sqrt{2}$ **D.** $S_{A'B'CD}=a^2;S_{AA'C'C}=a^2\sqrt{2}$

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' với các đường thẳng AB,AD,AA'.

A. $\left(\widehat{AC',AB}\right)=\left(\widehat{AC',AD}\right)=\left(\widehat{AC',AA'}\right)=\arccos\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\left(\widehat{AC',AB}\right)=\left(\widehat{AC',AD}\right)=\left(\widehat{AC',AA'}\right)=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\left(\widehat{AC',AB}\right)=\left(\widehat{AC',AD}\right)=\left(\widehat{AC',AA'}\right)=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\left(\widehat{AC',AB}\right)=\left(\widehat{AC',AD}\right)=\left(\widehat{AC',AA'}\right)=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

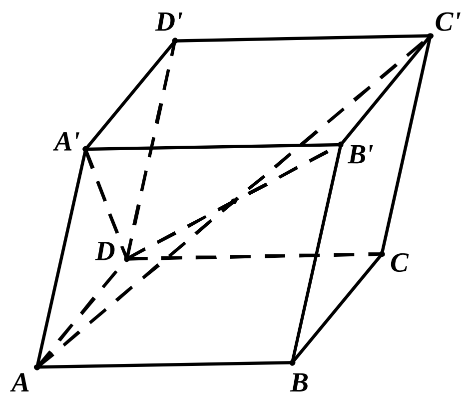
Hướng dẫn giải:

a) Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{A'B'}=\vec{b},\overrightarrow{A'D'}=\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{A'D}=\vec{a}+\vec{c}$ nên

$\cos\left(\widehat{AB,A'D}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}\right)\right|$

$=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}+\vec{c}\right|}$.



Để ý rằng $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=a$, $\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{a^2}{2}$.

Từ đó $\cos\left(\widehat{AB,A'D}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{AB,A'D}\right)=60^0$

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, từ đó tính được

$\overrightarrow{AC'}\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0\Rightarrow\left(\widehat{AC',B'D}\right)=90^0$.

b) $\overrightarrow{A'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{B'D}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{B'D}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)=0$

$\Rightarrow A'C\perp B'D$ nên $S_{A'B'DC}=\frac{1}{2}A'C.B'D$.

Dễ dàng tính được $A'C=a\sqrt{2},B'D=a\sqrt{2}\Rightarrow S_{A'B'CD}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}a.\sqrt{2}=a^2$

$S_{AA'C'C}=AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)$, $AA'=a,Ac=a\sqrt{3}$.

Tính được $\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $S_{AA'C'C} = AA'AC\sin\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AC}\right) = a.a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

c) ĐS: $\left(\widehat{AC',AB}\right) = \left(\widehat{AC',AD}\right) = \left(\widehat{AC',AA'}\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 79: Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - BC^2}$ **B.** $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$ **D.** $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ABAC\sin A = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

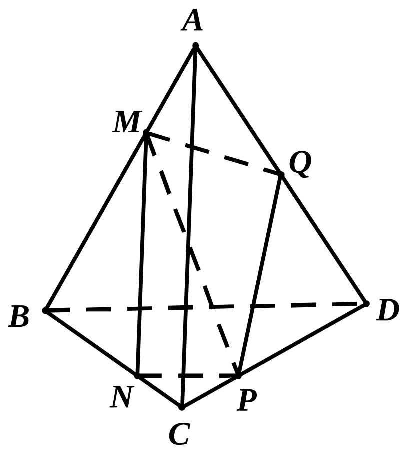
Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

A. $k = \dfrac{1}{2}$ **B.** $k = \dfrac{1}{3}$ **C.** $k = \dfrac{1}{4}$ **D.** $k = \dfrac{1}{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1.



Ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ do đó $MN \parallel AC$.

Vậy Nếu M, N, P, Q đồng phẳng thì

$(MNPQ)\cap(ACD) = PQ \parallel AC$

$\Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QA}{QD} = 1$ hay $\overrightarrow{DP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$\overrightarrow{MN} = -\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP} = -\dfrac{2}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}$, $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b}$

Các điểm M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \exists x, y : \overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = x\left(-\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{c}\right) + y\left(-\dfrac{1}{6}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b}\right)$

Do các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$\begin{cases} -\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=-\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x=k \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}, y=1, k=\frac{1}{2}.$

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=\alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC.

Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

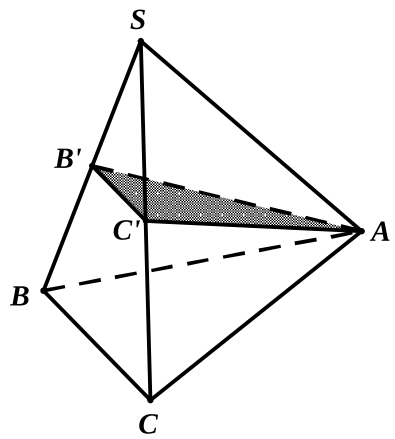
A. $S=\frac{a^2}{2}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$ **B.** $S=\frac{a^2}{2}\sqrt{7\cos^2\alpha-6\cos\alpha+9}$

C. $S=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-6\cos\alpha+9}$ **D.** $S=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC. Thiết diện là tam giác $AB'C'$.



Theo bài tập 5 thì $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{AB'^2\,AC'^2-(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'})^2}$

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{SB'}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

$\Rightarrow AB'^2=\frac{1}{4}SB^2+SA^2-\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SB}$

$=\frac{a^2}{4}(5-4\cos\alpha)$. Tính tương tự, ta có

$\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{AC'}=\frac{a^2}{4}(4-3\cos\alpha)$.

Vậy $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16}(5-4\cos\alpha)^2-\frac{a^4}{16}(4-3\cos\alpha)^2}$

$=\frac{a^2}{8}\sqrt{7\cos^2\alpha-16\cos\alpha+9}$.

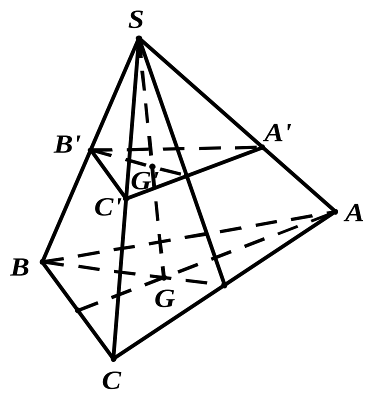
Câu 81: Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G' .Ta có $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=k\frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Do G là trọng tâm của ΔABC nên



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow 3\frac{SG}{SG'}\overrightarrow{SG'}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}$

$+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$

Mặt khác A', B', C', G' đồng phẳng nên

$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trong đó S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB. Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',M'.

Chứng minh: $\frac{S_aSA}{SA'}+\frac{S_bSB}{SB'}+\frac{S_cSC}{SC'}=\frac{S.SM}{SM'}$. (Với S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB và S là diện tích tam giác ABC).

Câu 82: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D'.Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SA'}+2\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+2\frac{SD}{SD'}$ **B.** $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{2SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{2SD'}$

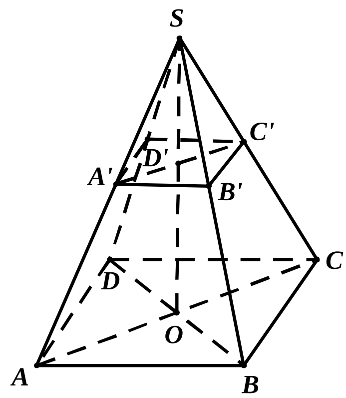
C. $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$ **D.** $\frac{SA}{SA'}-\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}-\frac{SD}{SD'}$

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SC'}=\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$ Do A',B',C',D' đồng phẳng

nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.



Câu 83: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a,SB=b,SC=c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$.

A. $\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$ **C.** $\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$ **D.** $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

Mà G,A',B',C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\Leftrightarrow\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

Ta có $\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)(a^2+b^2+c^2)\ge\left(\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}\right)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}\ge \dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi

$\dfrac{1}{aSA'}=\dfrac{1}{bSB'}=\dfrac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\dfrac{a}{SA'}+\dfrac{b}{SB'}+\dfrac{c}{SC'}=3$ ta được

$SA'=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3a}, SB'=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3b}, SC'=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3c}$.

Vậy GTNN của $\dfrac{1}{SA'^2}+\dfrac{1}{SB'^2}+\dfrac{1}{SC'^2}$ là $\dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 84: Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ lần lượt tại A',B',C',D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B',A'C',A'D'$ tại các điểm B_1,C_1,D_1.Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

A. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

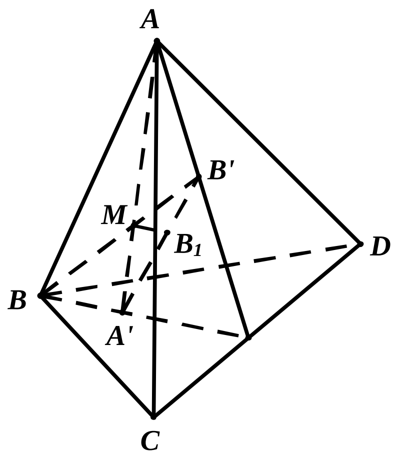
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên

tồn tại $x,y,z,t>0$ sao cho $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ (1)

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD).



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel(BCD)\\(BB'A')\cap(\alpha)=MB_1\\(BB'A')\cap(BCD)=BA'\end{cases}\Rightarrow MB_1\parallel BA'$.

Do đó $\dfrac{MB_1}{BA'}=\dfrac{MB'}{BB'}\Rightarrow \overrightarrow{MB_1}=\dfrac{MB'}{BB'}\overrightarrow{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$x\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MB'}+t\overrightarrow{MB'}=\vec{0}\Rightarrow(x+y+z)\overrightarrow{MB'}+y\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\Rightarrow(x+y+z+t)\overrightarrow{MB'}=y\overrightarrow{BB'}\Rightarrow\dfrac{MB'}{BB'}=\dfrac{y}{x+y+z+t}$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1}=\dfrac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}$ (3)

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1}=\dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}$ (4)

$\overrightarrow{MD_1}=\dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'}$ (5)

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' tì thu được

$y\overrightarrow{A'B}+z\overrightarrow{A'C}+t\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$. Vậy từ $(3),(4),(5)$ ta có

$\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=\frac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'}+z\overrightarrow{CA'}+t\overrightarrow{DA'}\right)=\vec{0}$, hay M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

Câu 85: Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$

Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của

$\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$ **B.** $\frac{3}{S}$ **C.** $\frac{2}{S^2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Hướng dẫn giải:

Do tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$ nên $\Delta BCD=\Delta ADC=\Delta DAB=\Delta CBA$

. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S=4S'=\frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\le\frac{9}{S^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le 9R^2$.

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+BC^2+3MG^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2+9MG^2\right)$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được

$9R^2=aa^2+b^2+c^2+9OG^2\ge a^2+b^2+c^2$.

Câu 86: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N,P xác định bởi

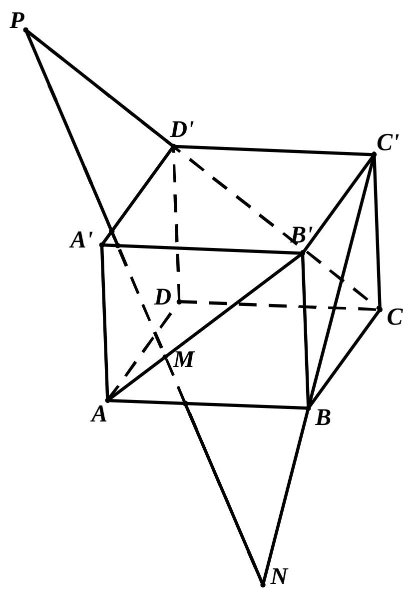
$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB'}(k\ne 0), \overrightarrow{NB}=x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC}=y\overrightarrow{PD'}$.

Hãy tính x,y theo k để ba điểm M,N,P thẳng hàng.

A. $x=\frac{2+k}{2-k}, y=-\frac{2}{k}$ **B.** $x=\frac{1+2k}{1-2k}, y=-\frac{1}{2k}$ **C.** $x=\frac{\frac{1}{2}+k}{2-k}, y=-\frac{1}{2k}$ **D.** $x=\frac{1+k}{1-k}, y=-\frac{1}{k}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ giả thiết ta có :

$\overrightarrow{AM}=\frac{k}{k-1}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (1)

$\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\frac{x}{x-1}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$ (2) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{y}{y-1}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)(3)$

Từ đó ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{x}{x-1}\vec{a}-\frac{1}{k-1}\vec{b}+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

$+\left(\frac{x}{x-1}-\frac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-(\frac{y}{y-1}+\frac{1}{k-1})\vec{b}+\left(\frac{y}{y-1}-\frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho

$\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{MP}$ $(*)$.

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào $(*)$ và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x = \dfrac{1+k}{1-k}, y = -\dfrac{1}{k}$.

Câu 87: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\dfrac{MA}{MA'}$.

A. $\dfrac{MA}{MA'} = 1$ **B.** $\dfrac{MA}{MA'} = \sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{MA}{MA'} = 2$ **D.** $\dfrac{MA}{MA'} = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

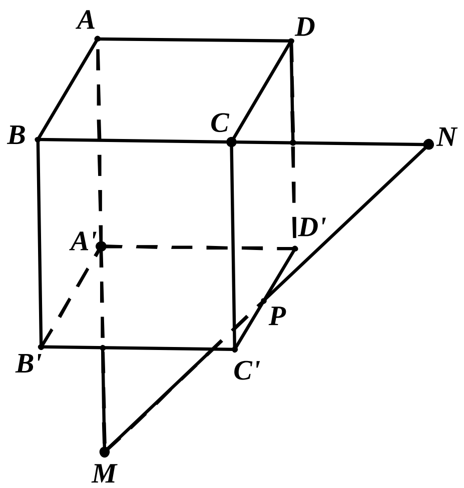
$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}$, $P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\dfrac{1}{2}, l = 2$. Vậy $\dfrac{MA}{MA'} = 2$.



Câu 88: Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$.

Ta được S, I, J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{MS}{MA} + \dfrac{NS}{NB} + \dfrac{PS}{PC} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{JS}{JI}$ **B.** $\dfrac{MS}{MA} + \dfrac{NS}{NB} + \dfrac{PS}{PC} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{JS}{JI}$

C. $\dfrac{MS}{MA} + \dfrac{NS}{NB} + \dfrac{PS}{PC} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{JS}{JI}$ **D.** $\dfrac{MS}{MA} + \dfrac{NS}{NB} + \dfrac{PS}{PC} + 1 = \dfrac{JS}{JI}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Goi $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP, T = AN \cap BM$.

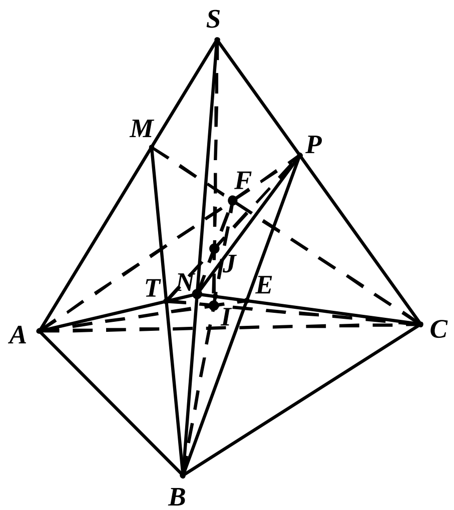
Trong (BCM) có $I = BF \cap CT$ trong (ANP) có $NF \cap PT = J$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và

$\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{Sp} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM} = \dfrac{x}{x+1}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \dfrac{y}{y+1}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \dfrac{z}{z+1}\vec{c}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$

.



Do $T = AN \cap BM$ nên $\begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha \overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta \overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \end{cases} \Rightarrow \alpha \overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta \overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{y+1}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}$. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên ta có

$$\begin{cases} \frac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \frac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x+y+1} \\ \beta = \frac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\overrightarrow{SE} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c}, \quad \overrightarrow{SF} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I = BF \cap CT$ và $NF \cap PT = J$ ta được :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right), \quad \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}\left(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI} \Rightarrow \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy S, I, J thẳng hàng và $\frac{SI}{IJ} = x+y+z+1 = \frac{SM}{MA} + \frac{SN}{NB} + \frac{SP}{PC} + 1$.

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{a} \neq \vec{0}$ là VTCP của d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

2. Góc giữa hai đường thẳng:

- a′//a, b′//b ⇒ $\left(\widehat{a,b}\right) = \left(\widehat{a',b'}\right)$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b, $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$.

Khi đó: $$\left(\widehat{a,b}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^0 \le \alpha \le 180^0 \\ 180^0 - \alpha & \text{nếu } 90^0 < \alpha \le 180^0 \end{cases}$$

- Nếu a//b hoặc a ≡ b thì $\left(\widehat{a,b}\right) = 0^0$

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{a,b}\right) \le 90^0$

3. Hai đường thẳng vuông góc:

- $a \perp b \Leftrightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = 90^0$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B – BÀI TẬP

Câu 1: Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$.

B. Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $(\alpha) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C sai do:

Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta dựng đường thẳng c là đường vuông góc chung của a và b. Khi đó góc giữa a và c bằng với góc giữa b và c và cùng bằng $90°$, nhưng hiển nhiên hai đường thẳng a và b không song song.

D sai do: giả sử a vuông góc với c, b song song với c, khi đó góc giữa a và c bằng $90°$, còn góc giữa b và c bằng $0°$.

Do đó B đúng.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

B. Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn.

C. Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn.
D. Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 4: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là?
A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.
B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo lý thuyết.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?
A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c
B. Cho ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c
C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c
D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a,\ b)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?
A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng
B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy
C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng
D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi d_1, d_2, d_3 là 3 đường thẳng cắt nhau từng đôi một. Giả sử d_1, d_2 cắt nhau tại A, vì d_3 không nằm cùng mặt phẳng với d_1, d_2 mà d_3 cắt d_1, d_2 nên d_3 phải đi qua A. Thật vậy giả sử d_3 không đi qua A thì nó phải cắt d_1, d_2 tại hai điểm B, C điều này là vô lí, một đường thẳng không thể cắt một mặt phẳng tại hai điểm phân biệt.

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng** ?
A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.
C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.
D. Cho hai đường thẳng a và b song song, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với c.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 8: Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a,b).

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

D. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

Hướng dẫn giải:

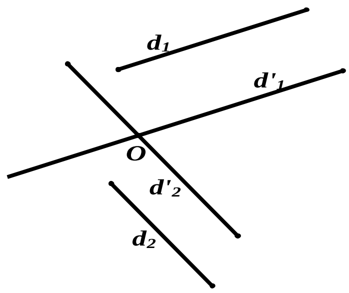
Chọn D. Theo định lý-sgk

DẠNG 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ O dựng các đường thẳng d_1', d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1', d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

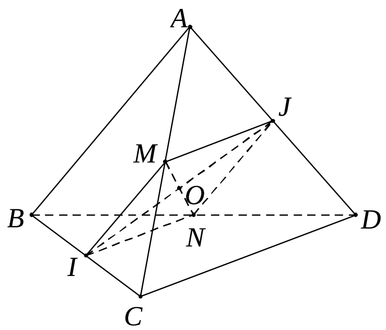
Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC.

Ta có:

$$\begin{cases} MI = NI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ MI \parallel AB \parallel CD \parallel NI \end{cases} \Rightarrow MINJ \text{ là hình thoi.}$$

Gọi O là giao điểm của MN và IJ.

Ta có: $\widehat{MIN} = 2\widehat{MIO}$.

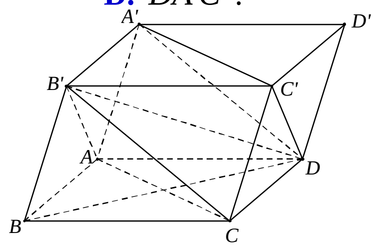
Xét ΔMIO vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{MIO}=\dfrac{IO}{MI}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{MIO}=30^\circ\Rightarrow\widehat{MIN}=60^\circ$.

Mà: $\left(AB,CD\right)=\left(IM,IN\right)=\widehat{MIN}=60^\circ$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{BDB'}$. **B.** $\widehat{AB'C}$. **C.** $\widehat{DB'B}$. **D.** $\widehat{DA'C'}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

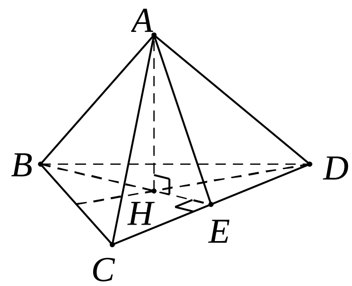
Ta có: $AC\,//\,A'C'$ (tính chất của hình hộp)

$\Rightarrow\left(AC,A'D\right)=\left(A'C',A'D\right)=\widehat{DA'C'}$ (do giả thiết cho $\Delta DA'C'$ nhọn).

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow AH\perp\left(BCD\right)$.

Gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow BE\perp CD$ (do ΔBCD đều).

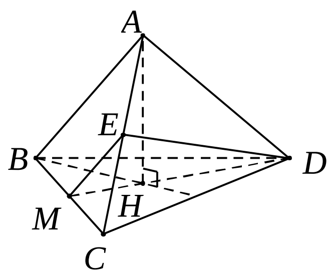
Do $AH\perp\left(BCD\right)\Rightarrow AH\perp CD$.

Ta có: $\begin{cases}CD\perp BE\\CD\perp AH\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(ABE\right)\Rightarrow CD\perp AB\Rightarrow\widehat{\left(AB,CD\right)}=90^\circ$.

Câu 17. [1H3-2] Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow AH\perp\left(BCD\right)$.

Gọi E là trung điểm AC $\Rightarrow ME\,//\,AB\Rightarrow\left(AB,DM\right)=\left(ME,MD\right)$

Ta có: $\cos\left(AB,DM\right)=\cos\left(ME,MD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MD}\right)\right|=\left|\cos\widehat{EMD}\right|$.

Do các mặt của tứ diện đều là tam giác đều, từ đó ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của ΔMED: $ME=a$, $ED=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔMED, ta có: $\cos\widehat{EMD}=\dfrac{ME^2+MD^2-ED^2}{2ME.MD}=\dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

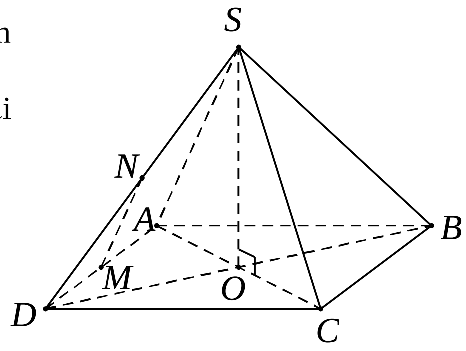
Từ đó: $\cos\left(AB,DM\right)=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN,SC\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA=SB=SC=SD\Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)$.

Từ giả thiết ta có: $MN\ //\ SA$ (do MN là đường trung bình của ΔSAD). $\Rightarrow\left(MN,SC\right)=\left(SA,SC\right)$.

Xét ΔSAC, ta có: $\begin{cases}SA^2+SC^2=a^2+a^2=2a^2\\ AC^2=2AD=2a^2\end{cases}\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S $\Rightarrow SA\perp SC$.

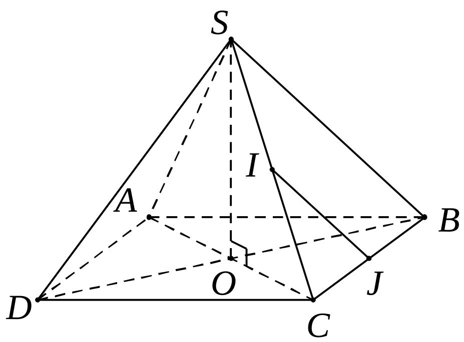
$\Rightarrow\left(SA,SC\right)=\left(MN,SC\right)=90°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc $\left(IJ,CD\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA=SB=SC=SD\Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)$.

Từ giả thiết ta có: $IJ\ //\ SB$ (do IJ là đường trung bình của ΔSAB). $\Rightarrow\left(IJ,CD\right)=\left(SB,AB\right)$.

Mặt khác, ta lại có ΔSAB đều, do đó $\widehat{SBA}=60°\Rightarrow\left(SB,AB\right)=60°\Rightarrow\left(IJ,CD\right)=60°$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc giữa $\left(IE,JF\right)$ bằng

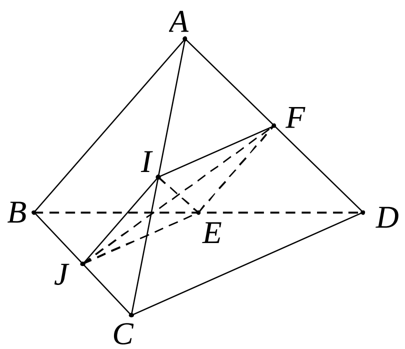
A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}IJ\ //\ EF\ //\ AB\\ JE\ //\ IF\ //\ CD\end{cases}$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Từ đó suy ra tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.



Mặt khác: $AB = CD \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}AB = JE = \frac{1}{2}CD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi

$\Rightarrow IE \perp JF$ (tính chất hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow (IE, JF) = 90°$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $120°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\left.\begin{matrix} AB \perp AE \\ AE // DH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow \left(\widehat{AB, DH}\right) = 90°$$

Câu 8: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $120°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì $ABCD$ và $ABC'D'$ là hình vuông nên $AD // BC'$; $AD = BC' \Rightarrow ADBC'$ là hình bình hành

Mà $O; O'$ là tâm của 2 hình vuông nên $O; O'$ là trung điểm của BD và AC' $\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $ADBC' \Rightarrow OO' // AD$

Mặt khác, $AD \perp AB$ nên $OO' \perp AB \perp \Rightarrow \left(\widehat{OO', AB}\right) = 90^o$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

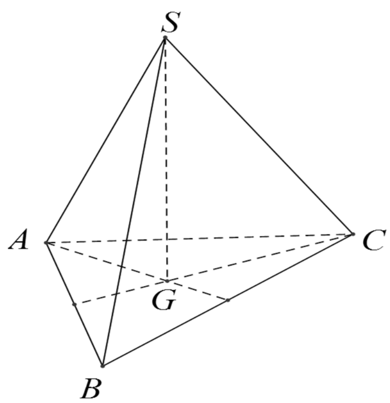
Ta có BAC và BAD là 2 tam giác đều, I là trung điểm của AB nên $CI = DI$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh AB) nên CID là tam giác cân ở I. Do đó $IJ \perp CD$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA\ (c-g-c) \Rightarrow AB = BC = CA$.

Do đótam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$

nên hình chiếu của S trùng với G

Hay $SG \perp (ABC)$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BG \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBG)$

Suy ra $AC \perp SB$.

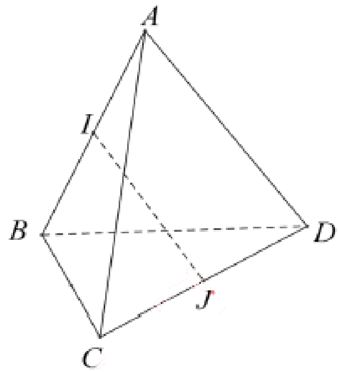
Vậy góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 90^0.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB=AC$ và $\widehat{BAC}=60°$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI\perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI\perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Hướng dẫn giải:

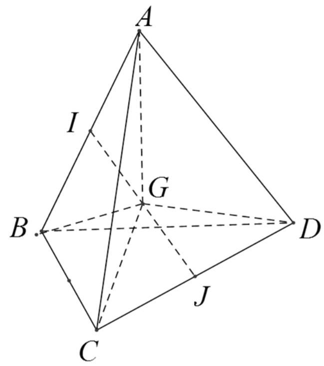
Chọn B.

$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2$

$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$

$=3AG^2+3BG^2+3CG^2+3DG^2+2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$

Lại có:



$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$=2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

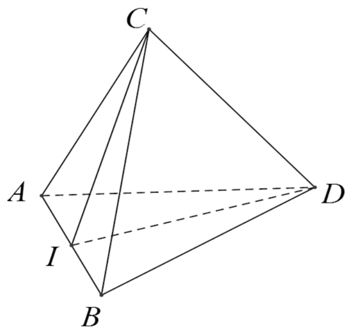
Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?

A. $120°$. **B.** $60°$.

C. $90°$. **D.** $30°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

Nên $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$.

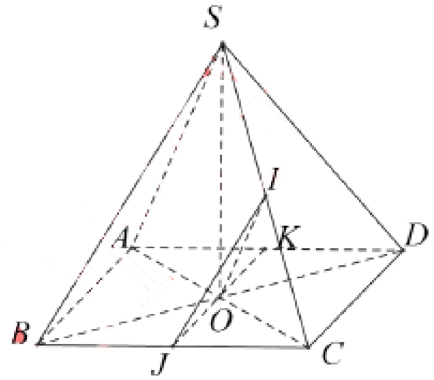
Suy ra $AB \perp (CID) \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $OJ // CD$.

Nên góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ.

Xét tam giác IOJ có

$IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}, OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}, IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$.

Nên tam giác IOJ đều.

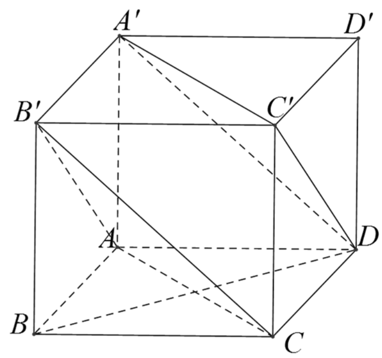
Vậy góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ bằng góc $\widehat{IJO} = 60^0$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C'}$. **C.** $\widehat{BB'D}$. **D.** $\widehat{BDB'}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



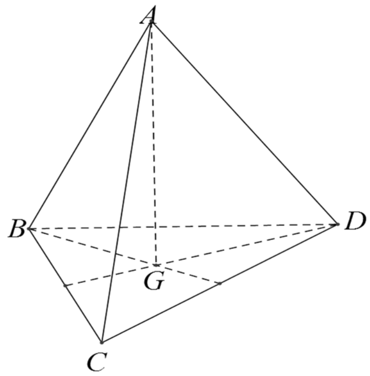
Ta có: $AC // A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'D$ bằng góc nhọn $\widehat{DA'C'}$ (Vì tam giác $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn

Câu 16: Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AG \\ CD \perp BG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABG) \Rightarrow CD \perp AB$.

Vậy số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thiết diện là hình chữ nhật.　　**B.** Thiết diện là hình vuông.
C. Thiết diện là hình bình hành.　　**D.** Thiết diện là hình thang.

Hướng dẫn giải:

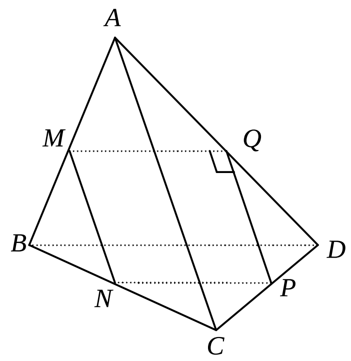
Chọn A.

Gỉa sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3.　　**B.** Đúng　　**C.** Sai ở bước 2.　　**D.** Sai ở bước 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. $120°$　　**B.** $45°$　　**C.** $60°$　　**D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

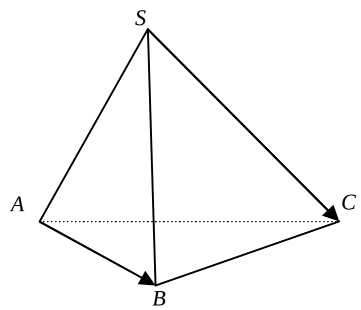
Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$= SA.SB\cos\widehat{BSC} - SC.SA.\cos\widehat{ASC} = 0$

Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC}$

Do đó: $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 90^0$



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

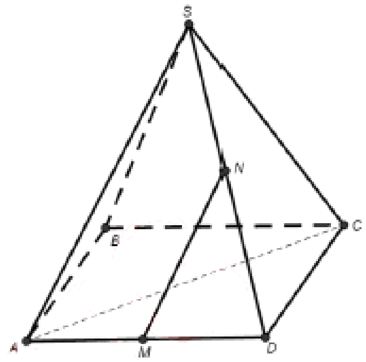
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90°$

$\Rightarrow (MN, SC) = 90°$



Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng $90°$.

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng $60°$.

C. Góc giữa AD và B_1C bằng $45°$.

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng $90°$.

Hướng dẫn giải:

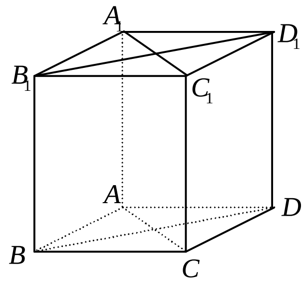
Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = 0$

(vì $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}\right) = 90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$)

Do đó: $\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}\right) = 90^0 \Rightarrow \left(AA_1, B_1D_1\right) = 90^0$



Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Hướng dẫn giải:

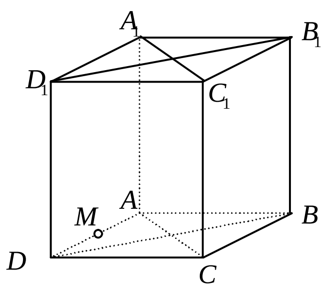
Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$

$= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2}$

$= \frac{a^2}{2}$



Câu 23: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. $A'C' \perp BD$ **B.** $BB' \perp BD$ **C.** $A'B \perp DC'$ **D.** $BC' \perp A'D$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BB'}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}$

$=BB'.BA\left(\cos\widehat{B'BA}+\cos\widehat{B'BC}\right)$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

+ $\widehat{B'BA}=\widehat{B'BC}\Rightarrow\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}\neq 0$ suy ra BB' không vuông góc với BD

+ $\widehat{B'BA}+\widehat{B'BC}=180^0\Rightarrow\cos\widehat{B'BA}=-\cos\widehat{B'BC}\Rightarrow\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}=0$ suy ra $BB'\perp BD$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $\widehat{B'BA}$ và $\widehat{B'BC}$

Chọn **B.**

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

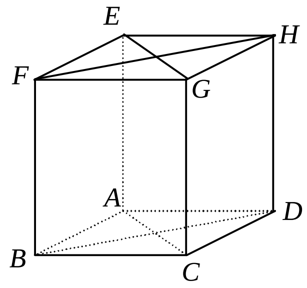
A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45°$



Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\alpha=60^0$

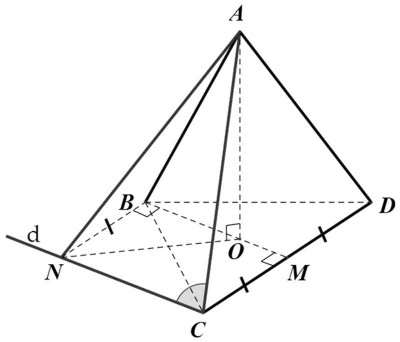
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi O là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow AO\perp(BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra:

$\left(\widehat{AC,BM}\right)=\left(\widehat{AC,CN}\right)=\left(\widehat{ACN}\right)=\alpha$



Có: $CN=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN=CN=\frac{a}{2}$

$AO^2=AB^2-BO^2=AB^2-\left(\frac{2}{3}BM\right)^2=\frac{2}{3}a^2$

$ON^2=BN^2+BO^2=\frac{7}{12}a^2$; $AN=\sqrt{AO^2+ON^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a\Rightarrow\cos\alpha=\frac{AC^2+CN^2-AN^2}{2AC.CN}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 26: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$?

A. 45^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

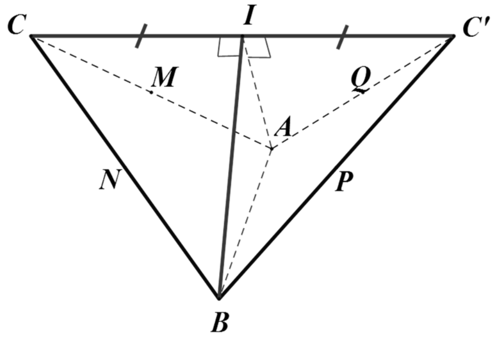
Gọi I là trung điểm CC'

$\Delta CAC'$ cân tại A $\Rightarrow CC'\perp AI$ (1)

$\Delta CBC'$ cân tại B $\Rightarrow CC' \perp BI$ (2)

$\xrightarrow{(1),(2)} CC' \perp (AIB) \Rightarrow CC' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

Kết luận: góc giữa $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AB}$ là $90°$



Câu 27: Cho $\vec{a} = 3,\ \vec{b} = 5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng đính sau?

A. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{19}$ **B.** $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 7$ **C.** $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right| = \sqrt{139}$ **D.** $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right| = 9$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 19$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 19$

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 120^0

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt cạnh của hình lập phương trên là a

Gọi I là giao trung điểm EG

Qua A kẻ đường thẳng $d // FI$

Qua I kẻ đường thẳng $d' // FA$

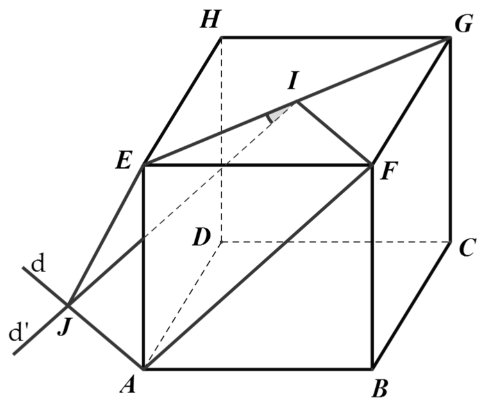
Suy ra d cắt d' tại J.

Từ đó suy ra $\left(\widehat{\overrightarrow{EG},\overrightarrow{AF}}\right) = \widehat{EIJ} = \alpha$

$IJ = AF = 2EI = 2FI = 2AJ = a\sqrt{2}$

$EJ^2 = AE^2 + AJ^2 = \dfrac{3}{2}$

$\cos\alpha = \left|\dfrac{EI^2 + IJ^2 + AJ^2}{2.EI.EJ}\right| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$



Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

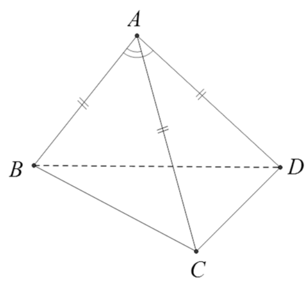
Hướng dẫn giải:

Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 90^0$



Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

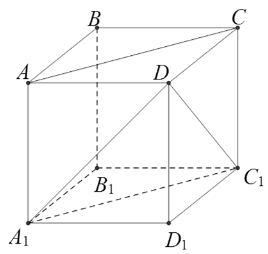
A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Hướng dẫn giải:

Vì $A'C'//AC$ nên góc giữa AC và DA_1 là $\widehat{DA_1C_1}$.

Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1}=60^0$.

Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0.



Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$.
Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

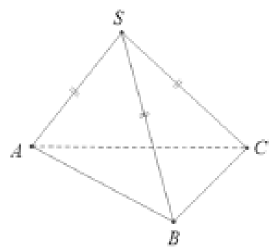
Hướng dẫn giải:

Ta có

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$=SA.SC.\cos\widehat{ASC}-SA.SB.\cos\widehat{ASB}=0$$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$$



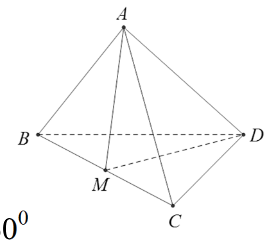
Câu 32: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$



Mặt khác

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos30^0-AB.AD.\cos60^0$$

$$=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $\left(0<x<1\right)$. mp$\left(P\right)$ song song với AB và CD lần lượt cắt BC,DB,AD,AC tại M,N,P,Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu ?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

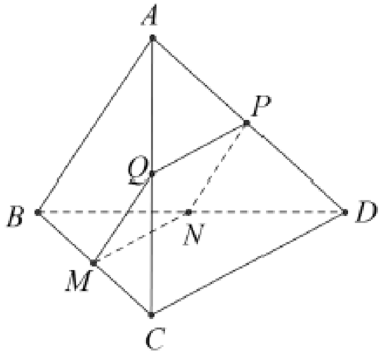
Hướng dẫn giải:

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases}MQ//NP//AB\\MN//PQ//CD\end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$

.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9$.

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

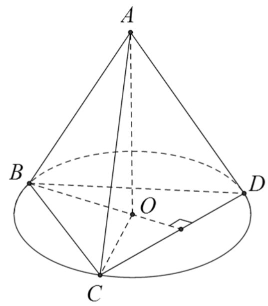
Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CO.CD.\cos 30^0 - CA.CD.\cos 60^0$

$= \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$

Suy ra $AO \perp CD$.



Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc $(IE,\ JF)$ bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

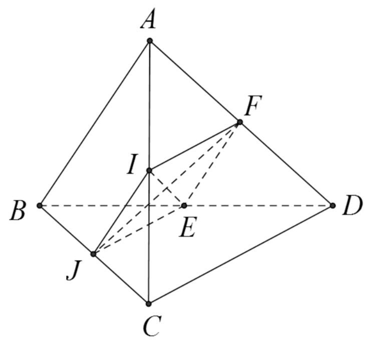
Hướng dẫn giải:

Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$ mà $AB = CD$ nên $IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi.

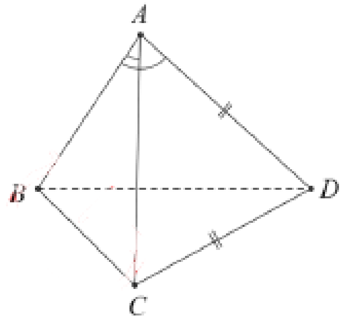
Suy ra $(IE,\ JF) = 90^0$.



Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD,\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^0,CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0$

$=AB.AD.\frac{1}{2}-AB.\frac{3}{2}AD.\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}AB.AD=-\frac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{-\frac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Câu 37: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Tứ giác $CDD'C'$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành. Lại có: $DC\perp\left(ADD'\right)\Rightarrow DC\perp DD'$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $IJ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I,J lần lượt là trung điểm của BC và AD).

Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

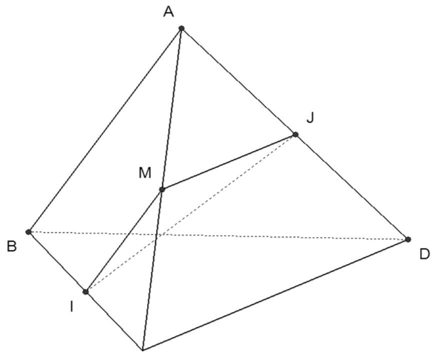
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của AC.

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

Tính được: $\cos IMJ=\frac{IM^2+MJ^2-IJ^2}{2MI.MJ}=-\frac{1}{2}$

Từ đó suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là: 60^0.



\

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC$, $AB\perp BD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}\Rightarrow AB\perp PQ$

Câu 39: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Hướng dẫn giải:

$(\vec{a}-\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{3}{8}$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=0$. **D.** $k=4$.

Hướng dẫn giải:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$$

$$=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=0.$$

Chọn đáp án C.

Câu 41: Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2+AC^2+BC^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+BC^2=GA^2+GB^2+GC^2$.

C. $AB^2+AC^2+BC^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1

Ta có

$$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=0$$

$$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+\left(GA^2+GB^2-AB^2\right)+\left(GA^2+GC^2-AC^2\right)+\left(GB^2+GC^2-BC^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} MA^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4} \\ GA=\frac{2}{3}MA \end{cases}\Rightarrow GA^2=\frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}\right).$$

Tương tự ta suy ra được

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}+\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\right).$$

$$=\frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

$$\Leftrightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2$$

Chọn đáp án **D.**

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

$$\begin{cases} AB^2+BC^2+CA^2=3 \\ GA^2+GB^2+GC^2=1 \end{cases} \Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2.$$

Chọn đáp án **D.**

Câu 42: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.
B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. M là trực tâm tam giác ABC.
D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$$P=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv G.$

Vậy $P_{\min}=GA^2+GB^2+GC^2$ với $M\equiv G$ là trọng tâm tam giác $ABC.$

Chọn đáp án A.

Câu 43: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=26;\left|\vec{b}\right|=28;\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25.　　**B.** $\sqrt{616}$.　　**C.** 9.　　**D.** $\sqrt{618}$.

Hướng dẫn giải:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$$

$$=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\left(26^2+28^2\right)-48^2=616$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{616}.$$

Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC$ và $\widehat{BDA}=60^0,\widehat{ADC}=90^0,\widehat{BDC}=120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó:

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất.　　**B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất.
C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất.　　**D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

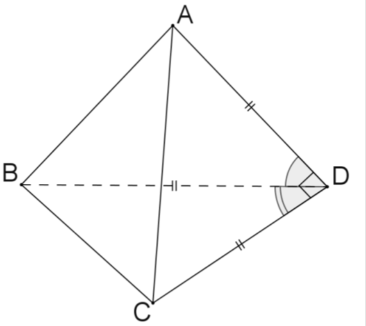
Hướng dẫn giải:

Đặt $DA=DB=DC=a$

Tam giác ABD đều cạnh a nên diện tích $S_{ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ACD vuông tại D nên diện tích $S_{ACD}=\dfrac{1}{2}DA.DC=\dfrac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}DB.DC\sin 120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Tam giác ABC có $AB = a, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại A. Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 45: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right| = 4; \left|\vec{b}\right| = 3; \vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\vec{x}.\vec{y} = \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \left(\vec{a}\right)^2 + 2\left(\vec{b}\right)^2 - 3\vec{a}.\vec{b} = 4$.

$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\left(\vec{x}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2 + 4\left(\vec{b}\right)^2 - 4\vec{a}.\vec{b}} = 2\sqrt{3}$.

$\left|\vec{y}\right| = \sqrt{\left(\vec{y}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2 + \left(\vec{b}\right)^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}$.

$\cos\alpha = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 46: Cho tam giác ABC có diện tích S. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - 2k\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

A. $k = \frac{1}{4}$. **B.** k = 0. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = 1$.

Hướng dẫn giải:

$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin C = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\sin^2 C} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\left(1 - \cos^2 C\right)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Chọn C.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

A. $MNPQ$ là hình vuông **B.** $MNPQ$ là hình bình hành

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật **D.** $MNPQ$ là hình thoi

Hướng dẫn giải:

a) Đặt $AB = AD = AC = a$

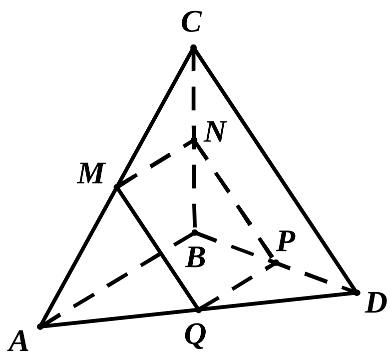
Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0=a.a.\frac{1}{2}-a.a.\frac{1}{2}=0$

Vậy $AB\perp CD$.

b) Ta có $MN\parallel PQ\parallel AB$ và $MN=PQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases}MN\parallel AB\\NP\parallel CD\\AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow MN\perp NP$, do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.



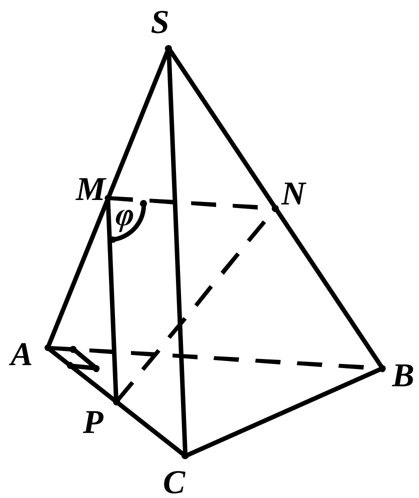
Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $\widehat{(AB,SC)}=60^0$　　**B.** $\widehat{(AB,SC)}=45^0$

C. $\widehat{(AB,SC)}=30^0$　　**D.** $\widehat{(AB,SC)}=90^0$

Hướng dẫn giải:

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SB,AC, khi đó $MN\parallel AB$ nên $\widehat{(AB,SC)}=\widehat{(MN,SC)}$.



Đặt $\varphi=\widehat{NMP}$, trong tam giác MNP có $\cos\varphi=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN.MP}\quad(1)$.

Ta có $MN=MP=\frac{a}{2}$, $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A,

vì vậy $PB^2=AP^2+AC^2=\frac{5a^2}{4}$, $PS^2=\frac{3a^2}{4}$.Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2=\frac{PB^2+PS^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN,MP,NP vào (1) ta được $\cos\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=120^0$.

Vậy $\widehat{(AB,SC)}=\widehat{(MN,SC)}=60^0$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA=AB$ và $SA\perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $\widehat{(BC,SD)}=30^0$　**B.** $\widehat{(BC,SD)}=45^0$　**C.** $\widehat{(BC,SD)}=60^0$　**D.** $\widehat{(BC,SD)}=50^0$

b) Gọi I,J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ\parallel BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

A. $\widehat{(IJ,AC)}=90^0$　**B.** $\widehat{(IJ,AC)}=60^0$　**C.** $\widehat{(IJ,AC)}=30^0$　**D.** $\widehat{(IJ,AC)}=45^0$

Hướng dẫn giải:

a) $\widehat{(BC,SD)}=45^0$　b) $\widehat{(IJ,AC)}=90^0$.

Câu 50: Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $AD \perp BC$ **B.** AD cắt BC

C. AD và BC chéo nhau **D.** Cả A, B, C đều đúng

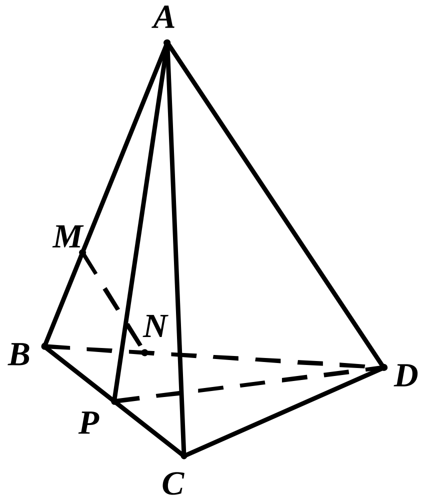
b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

A. $\left(\widehat{MN, BC}\right) = 90^0$ **B.** $\left(\widehat{MN, BC}\right) = 80^0$

C. $\left(\widehat{MN, BC}\right) = 60^0$ **D.** $\left(\widehat{MN, BC}\right) = 45^0$

Hướng dẫn giải:

a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác ABC và DBC cân nên $\begin{cases} AP \perp BC \\ DP \perp BC \end{cases}$.



Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}\right) = 0$

Vậy $BC \perp AD$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = |k|$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB} \Rightarrow \dfrac{ND}{NB} = |k|$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND}{NB}$

suy ra $MN \parallel AD \Rightarrow \left(\widehat{MN, BC}\right) = \left(\widehat{AD, BC}\right) = 90^0$ (Theo câu a)

Câu 51: Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$ .Tính góc giữa hai đường thẳng AC và B'D'.

A. $\left(\widehat{AC, B'D'}\right) = 90^0$ **B.** $\left(\widehat{AC, B'D'}\right) = 60^0$ **C.** $\left(\widehat{AC, B'D'}\right) = 45^0$ **D.** $\left(\widehat{AC, B'D'}\right) = 30^0$

Hướng dẫn giải:

HS tự giải.

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\left(\widehat{AB, CD}\right) = 30^0$ **B.** $\left(\widehat{AB, CD}\right) = 45^0$

C. $\left(\widehat{AB, CD}\right) = 60^0$ **D.** $\left(\widehat{AB, CD}\right) = 90^0$

Hướng dẫn giải:

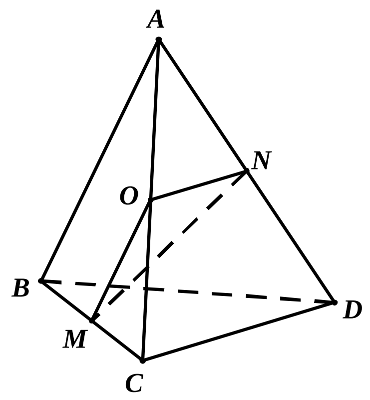
Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = a$.

$\begin{cases} OM \parallel AB \\ ON \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AB, CD}\right) = \left(\widehat{OM, ON}\right)$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

$\cos\widehat{MON} = \dfrac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON} = \dfrac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{(AB,CD)} = 60^0$.



Câu 53: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

a)Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**.

A. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó

B. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì không vuông góc với hai cạnh đó

C. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì *có thể vuông góc có thể không vuông góc* với hai cạnh đó

D. cả A, B, C đều sai

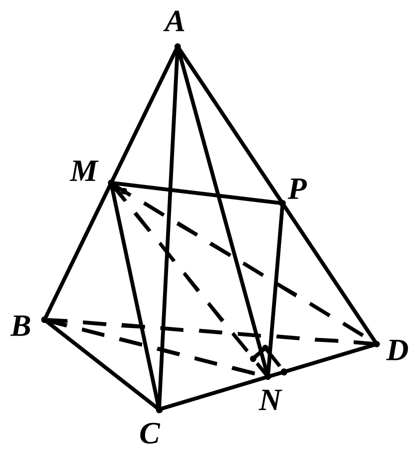
b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

A. $\widehat{(AC,BD)} = \arccos\left|\dfrac{\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}\right|$

B. $\widehat{(AC,BD)} = \arccos\left|\dfrac{2\left(a^2 + c^2\right)}{b^2}\right|$

C. $\widehat{(AC,BD)} = \arccos\left|\dfrac{2\left(a^2 - c^2\right)}{3b^2}\right|$

D. $\widehat{(AC,BD)} = \arccos\left|\dfrac{2\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}\right|$



Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD.

a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC = BD, AD = BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC = MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN \perp CD$.

Tương tự $MN \perp AB$.

Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại.

b) Ta có $\begin{cases} PM \parallel BD \\ PN \parallel AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(BD,AC)} = \widehat{(PM,PN)}$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$CM^2 = \dfrac{CA^2 + CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

Tương tự $DM^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, nên

$$MN^2 = \frac{MC^2+MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos\widehat{MPN} = \frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2.PM.PN} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}$$

Vậy $\widehat{(AC,BD)} = \arccos\left|\frac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}\right|$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phương pháp:

Để chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta có trong phần này ta có thể thực hiện theo các cách sau:

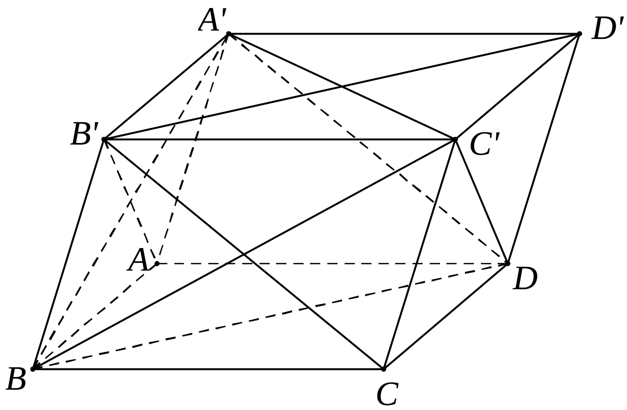
- Chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} = 0$ trong đó $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của d_1 và d_2.
- Sử dụng tính chất $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.
- Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1, d_2 và tính trực tiếp góc đó.
- Tính độ dài đoạn thẳng, diện tích của một đa giác
- Tính tích vô hướng…

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. $A'C' \perp BD$. **B.** $BB' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Chú ý: Hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau còn gọi là hình hộp thoi.

A đúng vì:

$\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD$.

B sai vì:

C đúng vì: $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ AB' \parallel DC' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'$.

D đúng vì: $\begin{cases} BC' \perp B'C \\ B'C \parallel A'D \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai ở bước 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

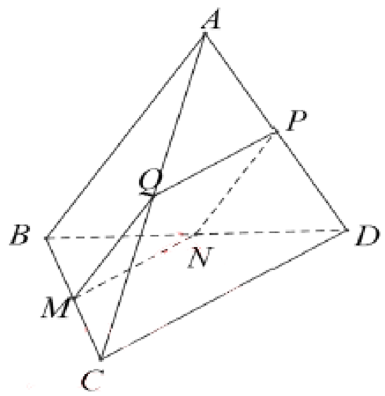
Ta có: $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có: $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

lại có $MN\perp MQ\left(do\ AB\perp CD\right)$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm của AB,CD,AD,BC và AC.

a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**?

A. $MN\perp RP, MN\perp RQ$ **B.** $MN\perp RP$, MN cắt RQ
C. MN chéo RP; MN chéo RQ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Tính góc của hai đường thẳng AB và CD?

A. $\widehat{(AB,CD)}=60^0$ **B.** $\widehat{(AB,CD)}=30^0$
C. $\widehat{(AB,CD)}=45^0$ **D.** $\widehat{(AB,CD)}=90^0$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $MC=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.

Lại có $RP\parallel CD\Rightarrow MN\perp RQ$.

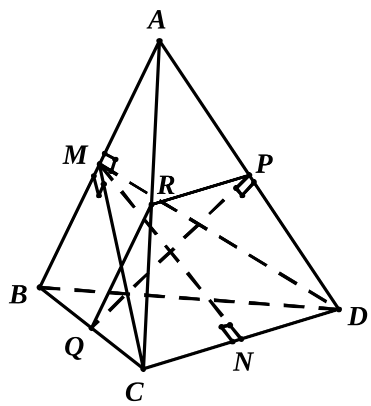
b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2=QD^2-DP^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$ Ta có :

$RQ^2+RP^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2=QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP\perp RQ$.



Vì vậy $\begin{cases}AB\parallel RQ\\CD\parallel RP\\RP\perp RQ\end{cases}\Rightarrow AB\perp CD$.

Câu 6: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì M, N, P, Q nên dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bhình hành.

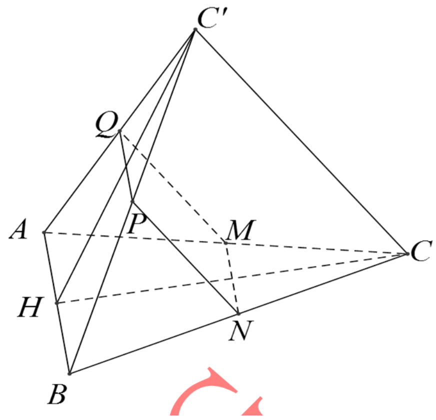
Gọi H là trung điểm của AB.

Vì hai tam giác ABC và ABC' nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có: $\begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$.

Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gì?.

A. $MNPQ$ là hình thang vuông. **B.** $MNPQ$ là hình vuông.

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật. **D.** $MNPQ$ là hình bình hành.

b)Tính diện tích của $MNPQ$ theo a.

A. $S_{MNPQ} = \frac{3a^2}{8}$ **B.** $S_{MNPQ} = \frac{a^2}{8}$ **C.** $S_{MNPQ} = \frac{3a^2}{4}$ **D.** $S_{MNPQ} = \frac{a^2}{4}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$.

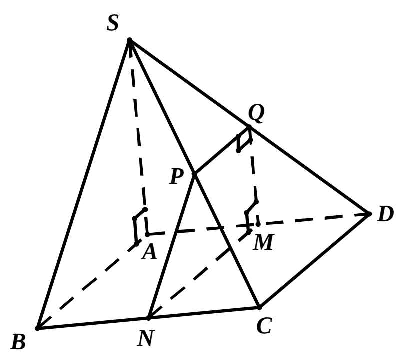
Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel SB$

$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \\ (\alpha) \cap (SAD) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SA$

Dễ thấy $MN \parallel PQ \parallel AB \parallel CD$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SA \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.



b) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$, $PQ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).MQ=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}=\frac{3a^2}{8}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD=NB=x(0\le x\le a)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AC'\perp B'D'$ **B.** AC' cắt B'D'

C. AC'và B'D' đồng phẳng **D.** Cả A, B, C đều đúng

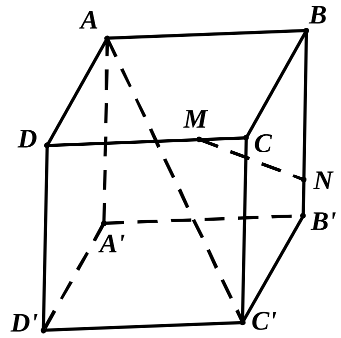
b) khẳng định nào sau đây là đúng ?.

A. $AC'\perp MN$

B. AC' và MN cắt nhau

C. AC' và MN đồng phẳng

D. Cả A, B, C đều đúng



Hướng dẫn giải:

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec{c}-\vec{b}$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{c}^2-\vec{b}^2=a^2-a^2=0$

$\Rightarrow AC'\perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)[\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}]$

$=\frac{x}{a}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}^2-\vec{c}^2=x.a+\left(1-\frac{x}{a}\right)a^2-a^2=0$.

Vậy $AC'\perp MN$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=a$, $BD=3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $MN=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

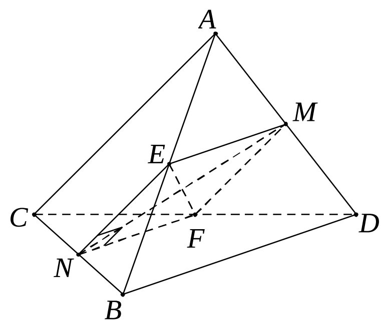
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\begin{cases}EN\ //\ AC\\NF\ //\ BD\end{cases}\Rightarrow(AC,BD)=(NE,NF)=90°\Rightarrow NE\perp NF$ (1).

Mà: $\begin{cases}NE=FM=\frac{1}{2}AC\\NF=ME=\frac{1}{2}BD\end{cases}$ (2).



Từ (1), (2) $\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

Từ đó ta có: $MN=\sqrt{NE^2+NF^2}=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Chọn D

Câu 10: Trong không gian cho ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

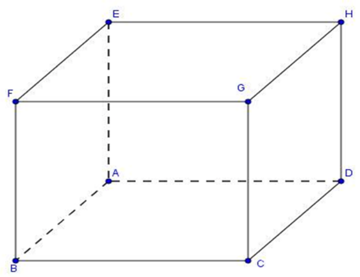
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\left(AB, AC\right) = AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2 **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a^2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a^2$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a,\ BD = 3a$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ **C.** $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $MN = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

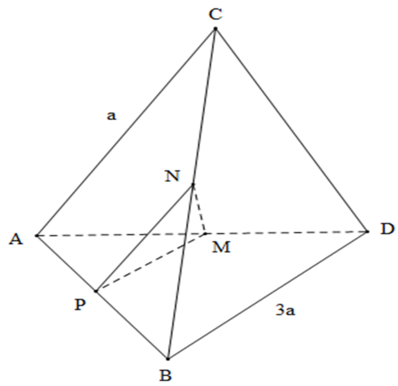
Kẻ $NP//AC\ \left(P \in AB\right)$, nối MP.

NP là đường trung bình $\Delta ABC \Rightarrow PN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.

MP là đường trung bình $\Delta ABD \Rightarrow PM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2}$.

Lại có $\left(AC, BD\right) = \left(PN, PM\right) = \widehat{NPM} = 90°$ suy ra $\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại P.

Vậy $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.



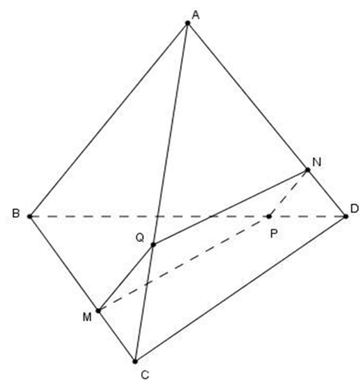
Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là $60°$ và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.**

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.



Ta có $\left(AB,CD\right)=\left(QM,MP\right)=\widehat{QMP}=60°$.

Suy ra $S_{MPNQ}=QN.QN.\sin 60°$.

Lại có

$\Delta CMQ\ \#\ \Delta CBA\Rightarrow \frac{CM}{AB}=\frac{MO}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MQ=2$

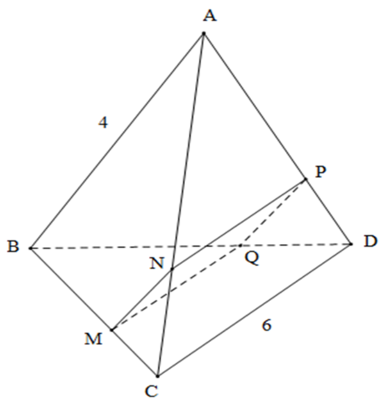
$\Delta AQN\ \#\ \Delta ACD\Rightarrow \frac{AQ}{AC}=\frac{QN}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow QN=2$

Do đó $S_{MPNQ}=QM.QN.\sin 60°=2.2.\sin 60°=2\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4$, $CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của $\left(P\right)$ với tứ diện là?

A. 5 **B.** 6 **C.** $\frac{17}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $\left(AB,CD\right)=\left(MN,MQ\right)=\widehat{NMQ}=90°$.

Suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có:

$\Delta CMN\sim\Delta CBA\Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3}$

$\Delta ANP\sim\Delta ACD\Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4$

Suy ra $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}$.

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa

$$d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a,\ \forall a \subset (P)$$

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

$$\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

3. Tính chất

• **Mặt phẳng trung trực** của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

• $\begin{cases} a /\!/ b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$

• $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a /\!/ b$

• $\begin{cases} (P) /\!/ (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$

• $\begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) /\!/ (Q)$

• $\begin{cases} a /\!/ (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$

• $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a /\!/ (P)$

4. Định lí ba đường vuông góc

Cho $a \not\perp (P), b \subset (P)$, a′ là hình chiếu của a trên (P). Khi đó $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

• Nếu $d \perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = 90^0$.

• Nếu $d \not\perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{d,d'}\right)$ với d′ là hình chiếu của d trên (P).

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{d,(P)}\right) \le 90^0$.

B – BÀI TẬP

Câu 1: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b /\!/ a$.
B. Nếu $b /\!/ (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b /\!/ a$ thì $b \perp (P)$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b /\!/ (P)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Qua điểm O có thể dựng vô số đường thẳng vuông góc với Δ, các đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với Δ.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây có thể **sai**?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song chỉ đúng khi ba đường thẳng đó đồng phẳng.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$ chỉ đúng khi hai đường thẳng đó cắt nhau.

Câu 5: Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là

A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.
B. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.
C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A.
D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo định nghĩa mặt phẳng trung trực.

Câu 6: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 7: Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 1 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải:

Theo tiên đề qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ

Chọn đáp án **A.**

Câu 8: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mp (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P)

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).(*ĐN đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*). Vậy đáp án **D** đúng.

Câu 9: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b//(\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a//b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Hướng dẫn giải:

Nếu $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases}$ thì a và c có thể trùng nhau nên đáp án **A** sai.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Hướng dẫn giải:

Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 11: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $a \parallel b$ thì $b \parallel (P)$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 12: Cho hai đường thẳng a,b và $mp(P)$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a//(P)$ và $b \perp a$ thì $b//(P)$.

B. Nếu $a//(P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a//(P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b//(P)$.

Hướng dẫn giải:

Câu A sai vì b có thể vuông góc với a.

Câu B đúng bởi $a//(P) \Rightarrow \exists a' \subset (P)$ sao cho $a//a'$, $b \perp (P) \Rightarrow b \perp a'$. Khi đó $\Rightarrow a \perp b$.

Câu C sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu D sai vì b có thể nằm trong (P).

Vậy chọn **B.**

Câu 13: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mp chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 14: Tập hợp các điểm cách đều các đỉnh của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó và đi qua:

A. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

B. Trọng tâm tam giác đó.

C. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

D. Trực tâm tam giác đó.

Câu 15: mệnh đề **đúng** trong các mặt phẳng sau:

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

***Hướng dẫn giải:*:**

Đáp án **A** sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.
Đáp án **B** sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.
Đáp án **C** sai vì hai đường thẳng đó có thể trùng nhau.
Chọn đáp án **D.**

Câu 16: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mp thì song song với nhau.
C. Cho hai mp song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt mp này thì cũng vuông góc với mp kia.
D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Vì qua một đường thẳng dựng được vô số mặt phẳng

Câu 17: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

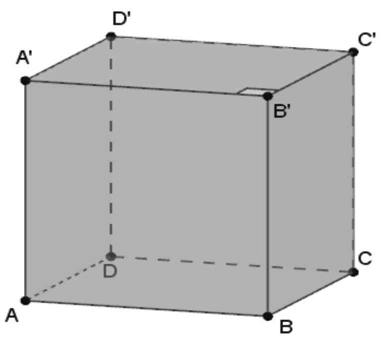
A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).
B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).
C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.
D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Giả sử xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ có

$\begin{cases} A'B'//(ABCD) \\ B'C'\perp A'B' \end{cases}$ nhưng $B'C'//(ABCD)$.

Chọn đáp án **A.**

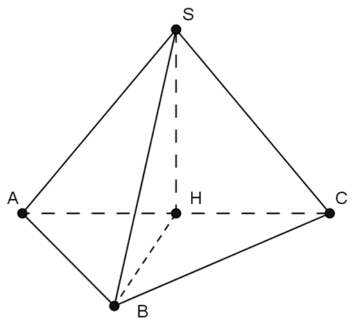


Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH\perp(ABC)$, $H\in(ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.
B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.
C. H trùng với trung điểm của AC.
D. H trùng với trung điểm của BC.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$. Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Mà ΔABC vuông tại B nên H là trung điểm của AC.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

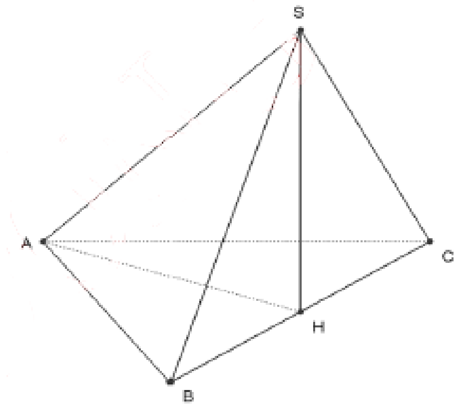
A. $(SBH)\cap(SCH) = SH$. **B.** $(SAH)\cap(SBH) = SH$.

C. $AB \perp SH$. **D.** $(SAH)\cap(SCH) = SH$.

Hướng dẫn giải:.

$(SBH)\cap(SCH) = (SBC)$

Chọn A.



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $HA = HB = HC = HD$.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
C. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.
D. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

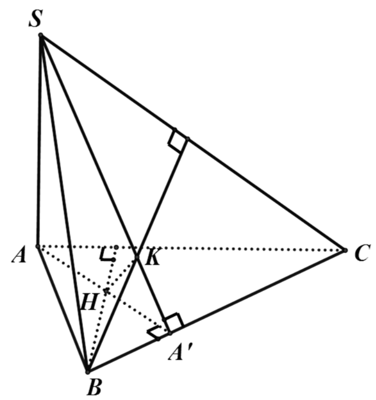
Vì hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau
$SA = SB = SC = SD$ và H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$
Nên H tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$
Suy ra $HA = HB = HC = HD$. Nên đáp án **B** sai.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Các đường thẳng AH, SK, BC thỏa mãn:

A. Đồng quy. **B.** Đôi một song song.
C. Đôi một chéo nhau. **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải:

Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow AA' \perp BC$ mà $BC \perp SA$ nên $BC \perp SA'$



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu H của S trên (ABC). là:

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. Trọng tâm tam giác ABC.
D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD.

Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S lên các cạnh AB, AC, BC.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC, BC.

$\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} \Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH$.

$\Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow$ H là tâm dường tròn nội tiếp của ΔABC.

Câu 23: Cho hình chóp đều, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đa giác đáy đó.
B. Tất cả những cạnh của hình chóp đều bằng nhau.
C. Đáy của hình chóp đều là miền đa giác đều.
D. Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân.

Hướng dẫn giải:

Hình chóp đều có thể có cạnh bên và cạnh đáy KHÔNG bằng nhau nên đáp án **B** sai.

Câu 24: Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình lăng trụ đứng?

A. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình bình hành.
B. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật.
C. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng bằng nhau và song song với nhau.
D. Hai đáy của hình lăng trụ đứng có các cạnh đôi một song song và bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn **A.**

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp:

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

Muốn chứng minh đương thẳng $d\perp(\alpha)$ ta có thể dùng môt trong hai cách sau.

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d\perp a \\ d\perp b \\ a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b=I \end{cases}\Rightarrow a\perp(\alpha)$$

Cách 2. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d\parallel a \\ (\alpha)\perp a \end{cases}\Rightarrow d\perp(\alpha)$$

Cách 3. Chứng minh d vuông góc với (Q) và (Q) // (P).

*** Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Để chứng minh d ⊥ a, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

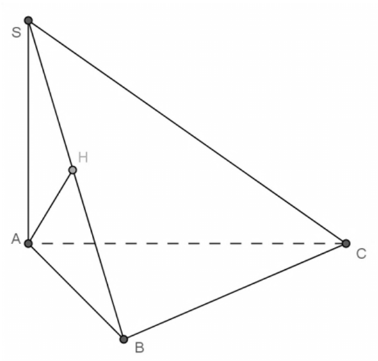
- Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a.
- Sử dụng định lí ba đường vuông góc.
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

Câu : Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và ΔABC vuông ở B, AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SA\perp BC$. **B.** $AH\perp BC$. **C.** $AH\perp AC$. **D.** $AH\perp SC$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Do $SA\perp(ABC)$ nên **câu** A đúng.

Do $BC\perp(SAB)$ nên **câu** B và D đúng.

Vậy câu C sai.

Câu 1: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA\perp(ABC)$

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh $BC\perp(SAB)$.

A. $BC\perp(SAB)$ **B.** $BC\perp(SAC)$

C. $\left(\widehat{AD,BC}\right)=45^0$ **D.** $\left(\widehat{AD,BC}\right)=80^0$

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB, thì khẳng định nào sau đây đúng nhất. Chứng minh $AH\perp SC$.

A. $AH\perp AD$ **B.** $AH\perp SC$

C. $AH\perp(SAC)$ **D.** $AH\perp AC$

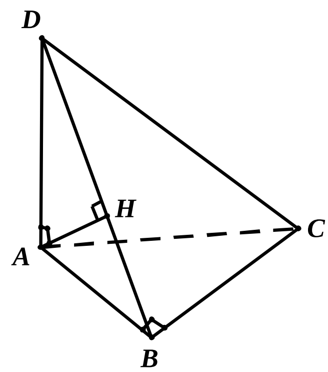
Hướng dẫn giải:.

a) Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$.

Do đó $\left.\begin{matrix} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)$ Chọn A

b) Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

Vậy $\left.\begin{matrix} AH\perp BC \\ AH\perp SB \end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp SC$ .Chọn B



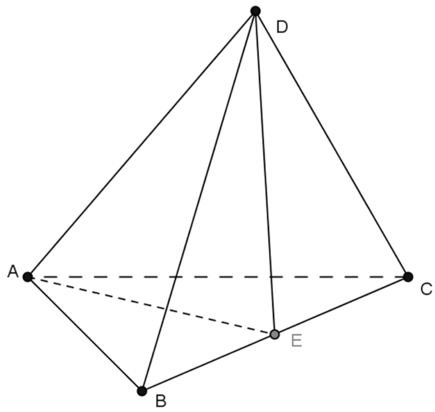
Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC$ và $DB=DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB\perp(ABC)$. **B.** $AC\perp BD$. **C.** $CD\perp(ABD)$. **D.** $BC\perp AD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\begin{cases} AE\perp BC \\ DE\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp(ADE)\Rightarrow BC\perp AD$.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $AB\perp BC$. Số các mặt của tứ diện $S.ABC$ là tam giác vuông là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Có $AB\perp BC\Rightarrow\Delta ABC$ là tam giác vuông tại B.

Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases} SA\perp AB \\ SA\perp AC \end{cases}\Rightarrow\Delta SAB,\Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A.

Mặt khác $\begin{cases} AB\perp BC \\ SA\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ là tam giác vuông tại B.

Vậy bốn mặt của tứ diện đều là tam giác vuông. Nên đáp án **D** đúng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

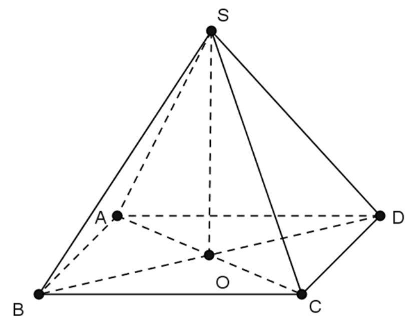
A. $SO\perp(ABCD)$. **B.** $CD\perp(SBD)$. **C.** $AB\perp(SAC)$. **D.** $CD\perp AC$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Tam giác SAC cân tại S có SO là trung tuyến $\Rightarrow SO$ cũng là đường cao $\Rightarrow SO\perp AC$.
Tam giác SBD cân tại S có SO là trung tuyến $\Rightarrow SO$ cũng là đường cao $\Rightarrow SO\perp BD$.
Từ đó suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên CD không vuông góc với BD. Do đó CD không vuông góc với (SBD).



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.Gọi $AE; AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Hướng dẫn giải:

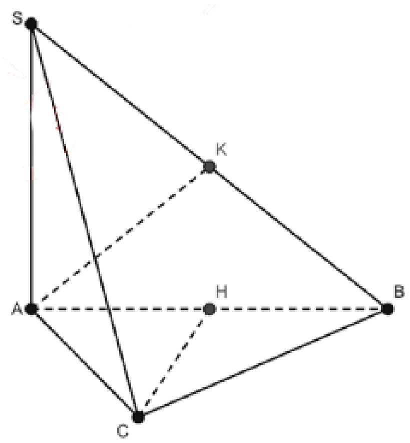
Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE.$

Vậy: $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp SC\,(1)$

Tương tự : $AF \perp SC\,(2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow SC \perp (AEF)$.vậy đáp án **D** đúng.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $CH \perp SA$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp AK$. **D.** $AK \perp SB$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Do ΔABC cân tại C nên $CH \perp AB$. Suy ra $CH \perp (SAB)$. Vậy các câu A, B, C đúng nên D sai.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Hướng dẫn giải::

$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$ $\rightarrow$ Chọn đáp án **D.**

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây có thể **sai** ?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

***Hướng dẫn giải:*:**

Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Từ đó suy ra $CH \perp AK, CH \perp SB, CH \perp SA$ nên **A, B, C** đúng.

Đáp án **D** sai trong trường hợp SA và AB không bằng nhau $\rightarrow$ Chọn đáp án **D.**

Câu 9: Cho tứ diện $SABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mp (ABC). Đối với ΔABC ta có điểm H là:

A. Trực tâm. **B.** Tâm đường tròn nội tiếp.

C. Trọng tâm. **D.** Tâm đường tròn ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải:

$SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AH \\ SH \perp BH \\ SH \perp CH \end{cases}$

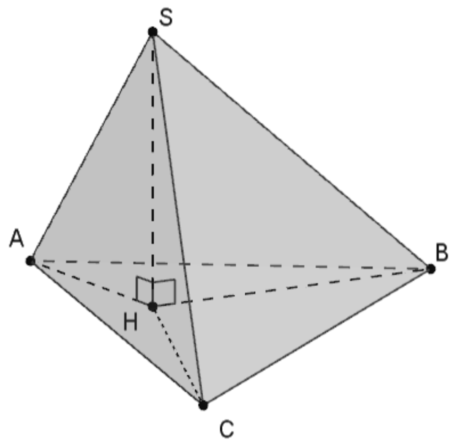
Xét ba tam giác vuông $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có

$\begin{cases} SA = SB = SC \\ SH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$ mà $H \in (ABC) \Rightarrow H$

chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Chọn đáp án **D.**



Câu 10: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên $mp(ABC)$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau:

A. H là trực tâm ΔABC.

B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

D. CH là đường cao của ΔABC.

***Hướng dẫn giải:*:**

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ và $OH \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Tương tự, ta có $AB \perp CH$, suy ra đáp án **A, D** đúng.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$, với $I = AH \cap BC$, suy ra đáp án **C** đúng.

$\rightarrow$ Chọn đáp án **B.**

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $mp(BCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. H là trực tâm tam giác BCD. **B.** $CD \perp (ABH)$.

C. $AD \perp BC$. **D.** Các khẳng định trên đều sai.

***Hướng dẫn giải:*:**

Ta có $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$. Tương tự $BD \perp CH$

Suy ra H là trực tâm ΔBCD. Suy ra đáp án **A, B** đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$, suy ra **C** đúng.

$\rightarrow$ Chọn đáp án **D.**

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

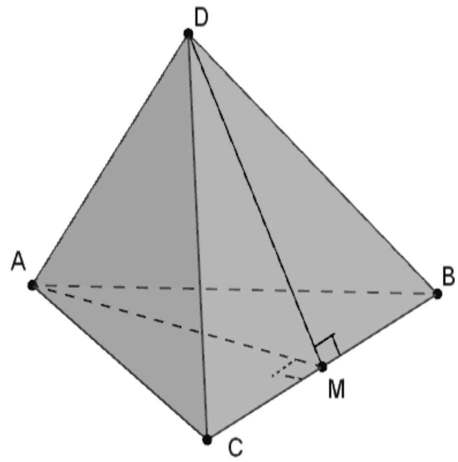
A. $AB \perp (ABC)$. **B.** $BC \perp AD$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $AC \perp BD$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC.

$\begin{cases} AB = AC \\ DB = DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp DM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp AD.$

Chọn đáp án **B.**



Câu 13: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $HK \perp (SBC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Hướng dẫn giải:

Ta có $BC \perp SA, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Ta có $CK \perp AB, CK \perp SA \Rightarrow CK \perp (SAB)$ hay $CK \perp SB$

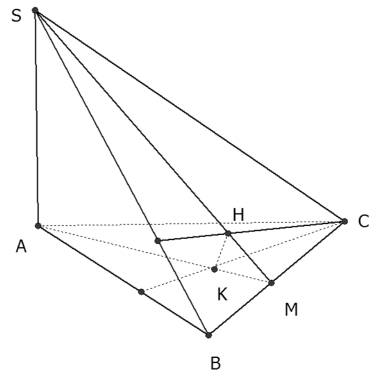
Mặt khác có $CH \perp SB$ nên suy ra $SB \perp (CHK)$ hay $SB \perp HK$,

tương tự $SC \perp HK$ nên $HK \perp (SBC)$

Gọi M là giao điểm của SH và BC. Do $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$ hay đường thẳng AM trùng với đường thẳng AK. Hay SH, AK và BC đồng quy.

Do đó $BC \perp (SAB)$. **sai**

Chọn đáp án **C.**



Câu 14: Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng :

a) Khẳng định nào sau đây là đúng về 2 tam giác ΔACH và ΔBFK ?

A. ΔACH và ΔBFK là các tam giác vuông **B.** ΔACH và ΔBFK là các tam giác tù

C. ΔACH và ΔBFK là các tam giác nhọn **D.** ΔACH và ΔBFK là các tam giác cân

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $BF \perp AH$ **B.** $\left(\widehat{BF, AH}\right) = 45^0$ **C.** $AC \perp BK$ **D.** $AC \perp (BKF)$

***Hướng dẫn giải:*.**

a) Ta có $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCE)$

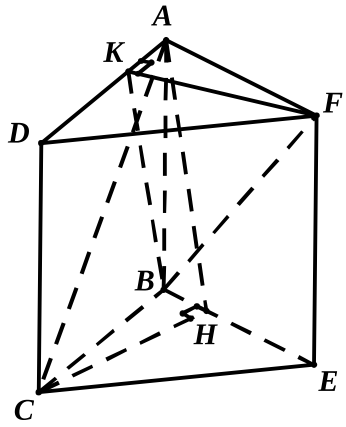
..

Vậy $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp BE \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF)$

$\Rightarrow CH \perp AH$,hay ΔACH vuông tại H.

Tương tự $\left.\begin{matrix} FK \perp AD \\ FK \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow FK \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \Delta BFK$ vuông tại K.



b) Ta có $CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp BF$, mặt khác

$AC \perp BF \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp KF \\ AC \perp BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$.

a)Khẳng định nào sau đây là **sai**?.

A. $SO \perp (ABCD)$ **B.** $SO \perp AC$

C. $SO \perp BD$ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**?.

A. $AC \perp (SBD)$ **B.** $AC \perp SO$ **C.** $AC \perp SB$ **D.** Cả A, B, C đều sai

***Hướng dẫn giải:*.**

a) Ta có O là trung điểm của AC và $SA = SC \Rightarrow SO \perp AC$.

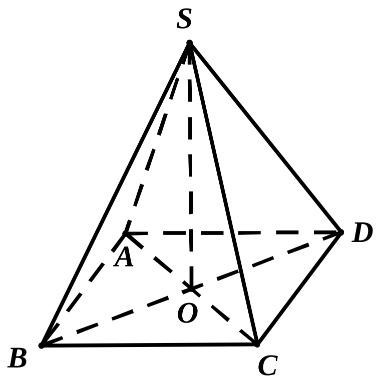
Tương tự $SO \perp BD$.

Vậy $\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .Chọn D

b) Ta có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi).

Lại có $AC \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

Suy ra $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ .Chọn D



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $SA \perp BD$ **B.** $SC \perp BD$ **C.** $SO \perp BD$ **D.** $AD \perp SC$

Hướng dẫn giải:

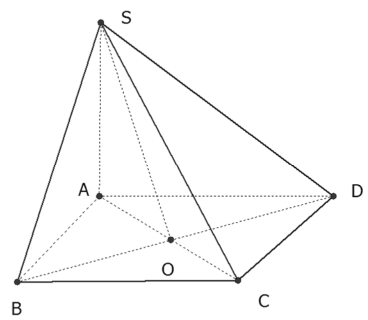
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC,$ mà $SA \perp BD$ nên

$BD \perp (SAC)$ *hay* $BD \perp SC, BD \perp SO$

AD không vuông góc SC

Chọn đáp án **D.**



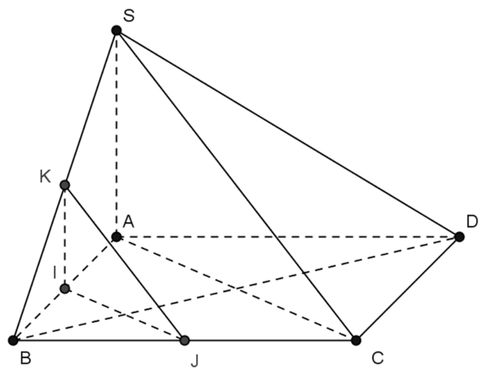
Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(IJK)//(SAC)$. **B.** $BD\perp(IJK)$.

C. Góc giữa SC và BD có số đo $60°$. **D.** $BD\perp(SAC)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Do $IJ // AC$ và $IK // SA$ nên $(IJK)//(SAC)$. Vậy A đúng.

Do $BD\perp AC$ và $BD\perp SA$ nên $BD\perp(SAC)$ nên D đúng.

Do $BD\perp(SAC)$ và $(IJK)//(SAC)$ nên $BD\perp(IJK)$ nên B đúng.

Vậy C sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, Gọi H là trung điểm của AB và $SH\perp(ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Khẳng định nào sau đây là sai?

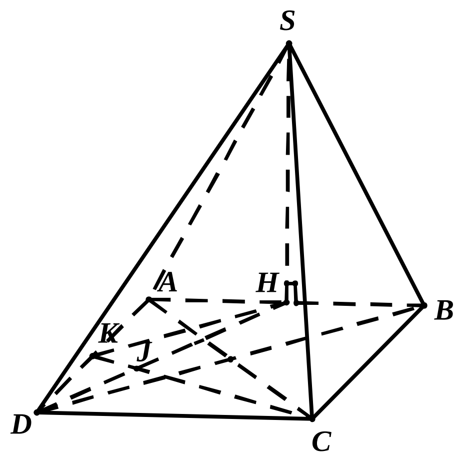
A. $AC\perp SH$ **B.** $AC\perp KH$ **C.** $AC\perp(SHK)$ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là sai?.

A. $CK\perp SD$ **B.** $DH\perp CK$

C. $\widehat{DKC}+\widehat{ADH}=90^0$ **D.** Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:.



a) Ta có $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AC$

lại có $\begin{cases}HK \parallel BD\\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow AC\perp HK$

$\Rightarrow AC\perp(SHK)$.

b) Dễ thấy $\Delta AHD=\Delta DKC\Rightarrow\widehat{AHD}=\widehat{DKC}$

mà $\widehat{AHD}+\widehat{ADH}=90^0$

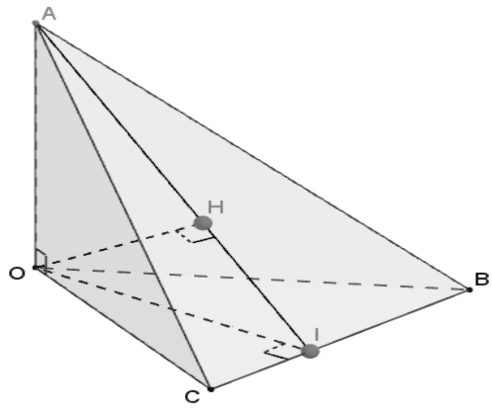
$\Rightarrow\widehat{DKC}+\widehat{ADH}=90^0$ hay $DH\perp CK$, mặt khác ta có $SH\perp CK\Rightarrow CK\perp(SDH)\Rightarrow CK\perp SD$.

Câu 19: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góC. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $OA\perp BC$. **B.** $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm ΔABC. **D.** $3OH^2=AB^2+AC^2+BC^2$.

Hướng dẫn giải:



$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow$ đáp án **A đúng.**

Tương tự chứng minh được $OC \perp AB$.

Hạ $\begin{cases} OI \perp BC \\ OH \perp AI \end{cases}$.

Ta có:

$\begin{cases} OI \perp BC \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow$ Đáp án **B đúng.**

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp HC (1)$. Tương tự $BC \perp OH$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ Đáp án **C đúng.**

Chọn đáp án **D.**

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Khẳng định nào sau đây là đúng

a) AH, SK và BC đồng qui.

A. AH và BC chéo nhau **B.** AH và SK chéo nhau

C. AH, SK và BC đồng qui. **D.** AH, SK và BC không đồng qui.

b) Khẳng định nào sau đây là sai?.

A. $SB \perp (CHK)$ **B.** $SB \perp HK$ **C.** $CH \perp (SAB)$ **D.** Cả A, B, C đều sai

c) $HK \perp (SBC)$.Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $HK \perp (SBC)$ **B.** $BC \perp (SAI)$ **C.** $BC \perp HK$ **D.** Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:.

a) Gọi $I = AH \cap BC$, để chứng minh AH, SK và BC đồng qui.

Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do $BC \perp SA$ và $BC \perp AI$.

b) Ta có $SB \perp CK$

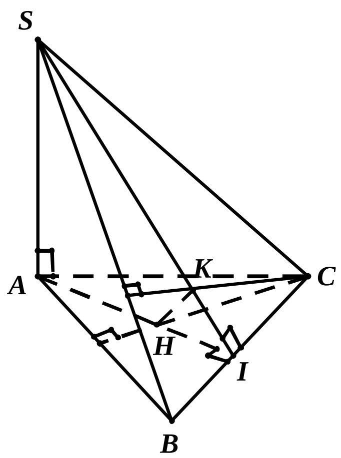
thêm nữa ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$

Vậy $SB \perp (CHK)$.

b) Theo các chứng minh trên ta có

$SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK$ và $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp HK$ do đó

$HK \perp (SBC)$.



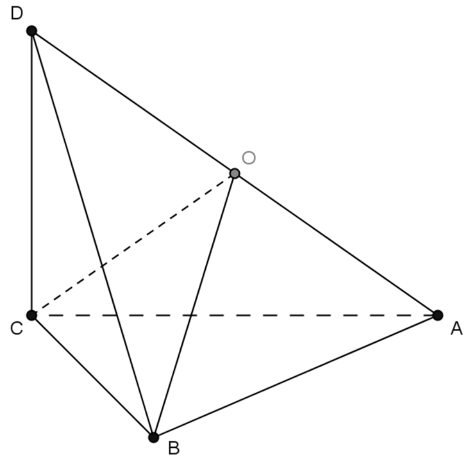
Câu 21: Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

B. O là trọng tâm tam giác ACD.
C. O là trung điểm cạnh BD.
D. O là trung điểm cạnh AD.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là trung điểm của AD.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp AC$.

Vậy ΔACD vuông tại C.

Do đó $OA = OC = OA$ (1)

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp CD \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B.

Do đó $OA = OB = OD$ (2)

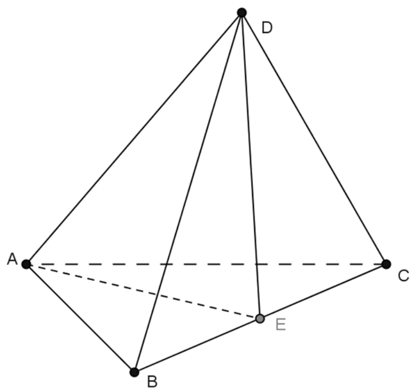
Từ (1) và (2) ta có $OA = OB = OC = OD$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (ABC)$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $BC \perp AD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



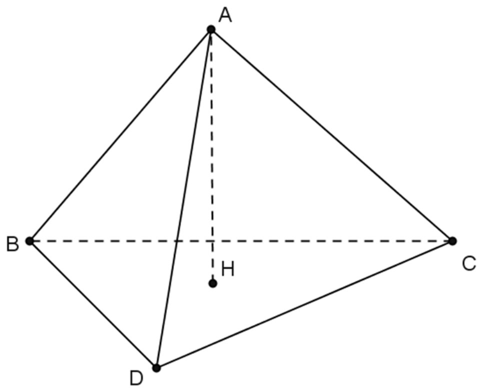
Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\begin{cases} AE \perp BC \\ DE \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp AD$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây **không sai**?

A. $AB = CD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB \perp CD$. **D.** $CD \perp BD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

Mặt khác, H là trực tâm ΔABC nên $BH \perp CD$.

Suy ra $CD \perp (ABH)$ nên $CD \perp AB$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) Khẳng định nào sau đây là sai?.

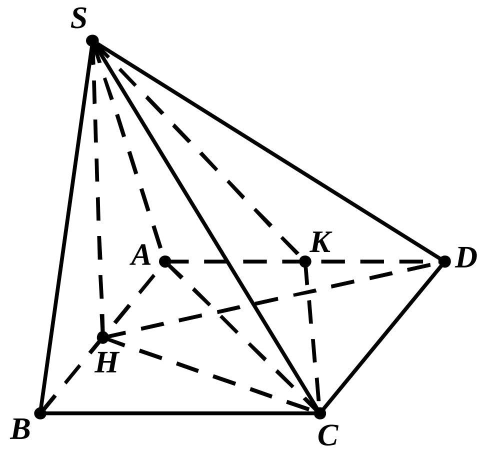
A. $SH \perp (ABCD)$ **B.** $SH \perp HC$ **C.** A, B đều đúng **D.** A, B là sai

b) Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $CK \perp HD$ **B.** $CK \perp SD$

C. $AC \perp SK$ **D.** Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:.



a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$

Lại có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SC = a\sqrt{2}$, $HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $HC^2 + HS^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = 2a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta HSC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$

Vậy $\begin{cases} SH \perp HC \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp HK$ và $AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SHK)$

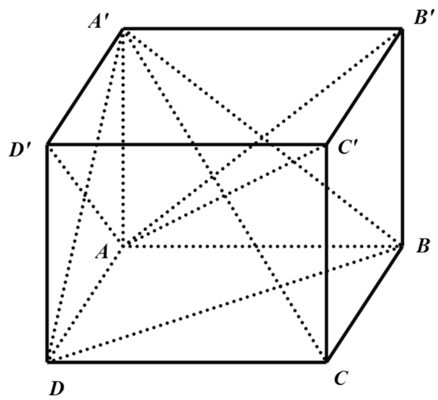
$\Rightarrow AC \perp SK$.

Tương tự $CK \perp HD$ (như bài 32) và $CK \perp SH \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$\begin{cases} A'D \perp AD' & (t/c\ HV) \\ A'D \perp C'D' & (C'D' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

$\Rightarrow A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (1)$

$\begin{cases} A'B \perp AB' & (t/c\ HV) \\ A'B \perp B'C' & (B'C' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

$\Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC' \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AB \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải:

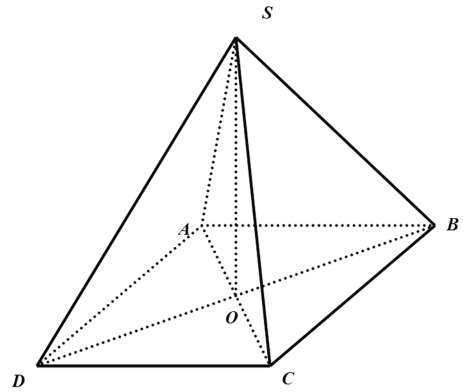
Ta có: $SA = SC \Rightarrow SAC$ là tam giác cân

Mặt khác: O là trung điểm của AC (tính chất hình thoi)

Khi đó ta có: $AC \perp SO$

$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD & (t/c \text{ hình thoi}) \\ AC \perp SO & \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $AK \perp HK$.   **B.** $HK \perp AM$.   **C.** $BD \perp HK$.   **D.** $AH \perp SB$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$\begin{cases} BD \perp AC & (t/c \text{ HV}) \\ BD \perp SA & (gt) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM$

Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap HK$

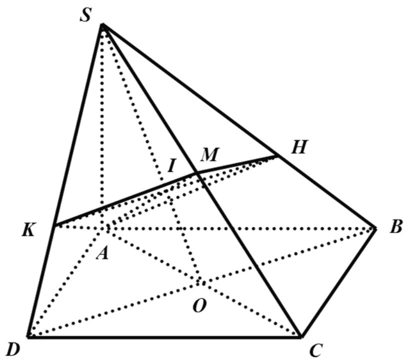
(P) là mặt phẳng A và vuông góc với SC

Qua I kẻ $\Delta \parallel BD \Rightarrow \Delta \perp AM \Rightarrow \Delta \subset (P)$

Khi đó: $K = \Delta \cap SD, H = \Delta \cap SB$

Ta có: $AK \perp (SDC)$, mà $HK \cap (SDC) = K \Rightarrow AK$ không vuông góc

Vậy chọn đáp án A.



Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Trong các tam giác sau tam giác nào không phải là tam giác vuông.

A. ΔSBC.   **B.** ΔSCD.   **C.** ΔSAB.   **D.** ΔSBD.

Hướng dẫn giải:

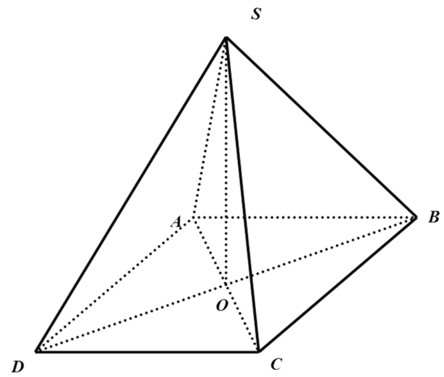
Ta có :

$\begin{cases} AB \perp AD & (tc \text{ HV}) \\ AB \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$

Giả sử $SB \perp SD \Rightarrow SD \perp (SAB)$ (vô lý)

Hay ΔSBD không thể là tam giác vuông

Vậy chọn đáp án D.



Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^0, \widehat{CSA} = 60^0, \widehat{ASB} = 90^0, SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. I là trung điểm AB.   **B.** I là trọng tâm tam giác ABC.

C. I là trung điểm AC.   **D.** I là trung điểm BC.

Hướng dẫn giải:

Gọi $SA = SB = SC = a$

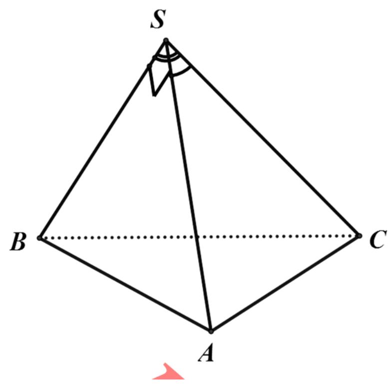
Ta có : $\triangle SAC$ đều $\Rightarrow AC = SA = a$

$\triangle SAB$ vuông cân tại S $\Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos\widehat{BSC}} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

Gọi I là trung điểm của AC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC thì d đi qua I và $d \perp (ABC)$



Mặt khác : $SA = SB = SC$ nên $S \in d$. Vậy $SI \perp (ABC)$ nên I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC)

Vì H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC nên H và K lần lượt thuộc AA' và SA'

Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'

Câu 30: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Xét các mệnh đề sau :

I. Vì $OC \perp OA, OC \perp OB$ nên $OC \perp (OAB)$.

II. Do $AB \subset (OAB)$ nên $AB \perp OC$. (1)

III. Có $OH \perp (ABC)$ và $AB \subset (ABC)$ nên $AB \perp OH$. (2)

IV. Từ (1) và (2) $AB \perp (OCH)$.

A. I, II, III, IV. **B.** I, II, III. **C.** II, III, IV. **D.** I, IV.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \\ OA \cap OB = O \\ OA, OB \subset (OAB) \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$$. Vậy I đúng.

$$\begin{cases} OC \perp (OAB) \\ AB \subset (OAB) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OC$$. Vậy II đúng.

$$\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OH$$. Vậy III đúng.

$$\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \\ OC \cap OH = O \\ OC, OH \subset (OCH) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH)$$. Vậy IV đúng.

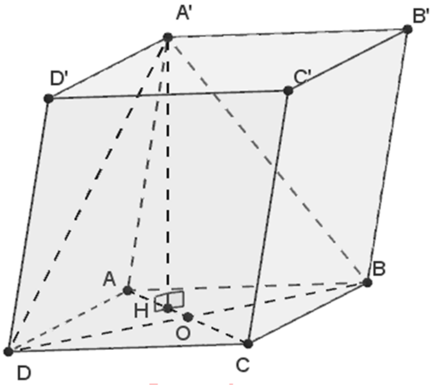
Vậy chọn đáp án A.

Câu 31: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có đáy là hình thoi $\widehat{BAD} = 60^0$ và $A'A = A'B = A'D$. Gọi $O = AC \cap BD$. Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ là :

A. trung điểm của AO. **B.** trọng tâm ΔABD.

C. giao của hai đoạn AC và BD. **D.** trọng tâm ΔBCD.

Hướng dẫn giải:



Vì $A'A = A'B = A'D \Rightarrow$ hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD (1).

Mà tứ giác $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^0$ nên ΔBAD là tam giác đều (2).

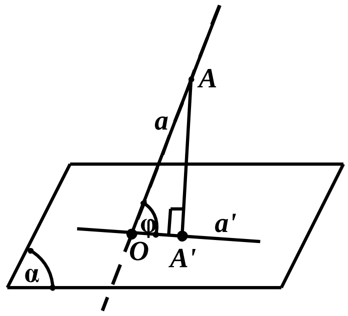
Từ (1) & $(2) \Rightarrow H$ là trọng tâm ΔABD.

Chọn đáp án **B.**

DẠNG 2: TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:



- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $\widehat{AOA'} = \varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).

Lưu ý:

- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' \parallel b$.
- Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).
-

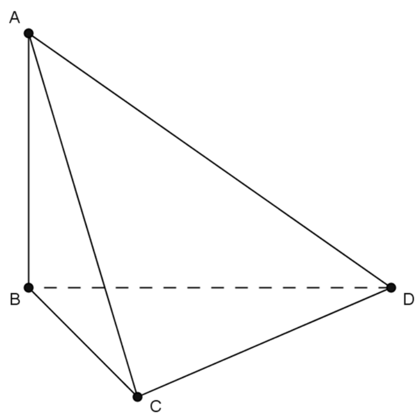
Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB. **B.** Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB.

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB. **D.** Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$.

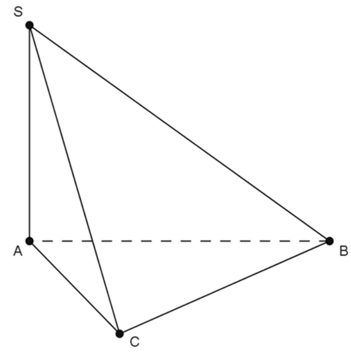
Do đó $(AC,(BCD)) = \widehat{ACB}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



$SA \perp (ABC) \Rightarrow (SA,(ABC)) = 90°$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$. **B.** Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$. **D.** Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Hướng dẫn giải:

Do AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một nên $AB \perp (BCD)$, suy ra BC là hình chiếu của AC lên (BCD).

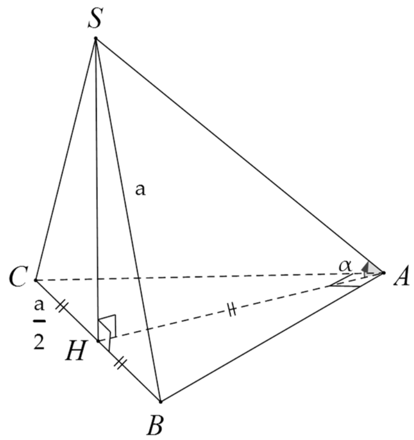
Chọn B.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi H là trung điểm của BC suy ra

$AH = BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$

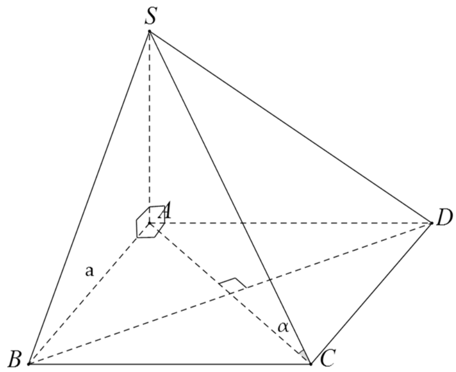
$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC$

$\Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}=\alpha$

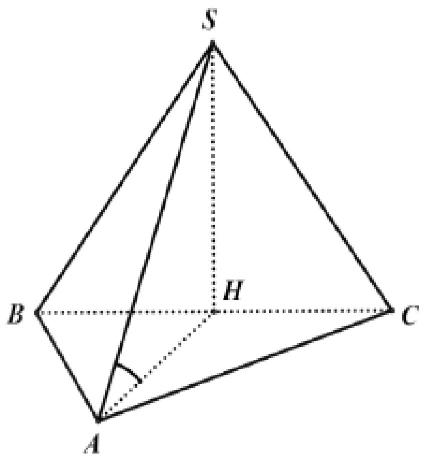
$ABCD$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow AC=a\sqrt{2}, SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \alpha=30°$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 60^0 **B.** 75^0 **C.** 45^0 **D.** 30^0

Hướng dẫn giải:



Do H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên

$SH\perp(ABC)$

Vậy AH là hình chiếu của SH lên mp (ABC)

$\Rightarrow (SA;(ABC))=(SA;AH)=\widehat{SAH}$

Ta có: $SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp AH$

Mà: $\triangle ABC=\triangle SBC\Rightarrow SH=AH$. Vậy tam giác SAH vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{SAH}=45^0$

Câu 7: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $AC=2a; BD=2AC$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO\perp(ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SBO}=\dfrac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Hướng dẫn giải:

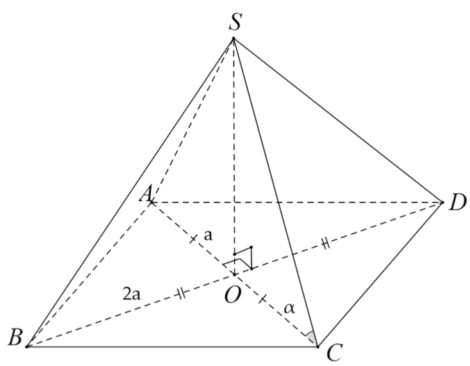
Chọn B.

Ta có: $AC=2a; BD=2AC=4a\Rightarrow OB=2a$

$\Rightarrow \tan\widehat{SBO}=\dfrac{SO}{OB}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow SO=\dfrac{1}{2}OB=a$.

Mặt khác $\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCO}; \dfrac{SO}{OC}=\dfrac{a}{a}=1$

Suy ra số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$.

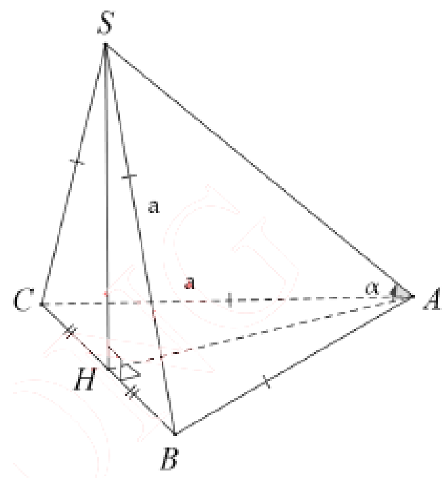


Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều.Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có:

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow \widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$.

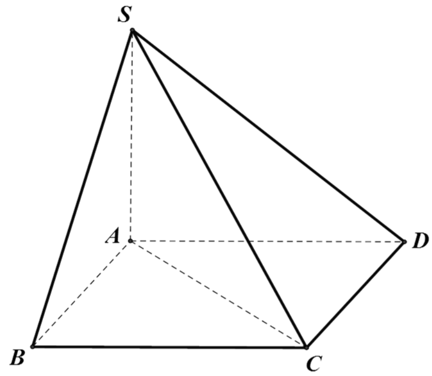
ΔABC và ΔSBC là hai tam giác đều cạnh a $\Rightarrow AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta SHA$ vuông cân tại H $\Rightarrow \alpha = 45°$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mp $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Hướng dẫn giải:



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa giữa SC và mp $(ABCD)$ bằng góc $SC \,\&\, AC$.

$\Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 75^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải:

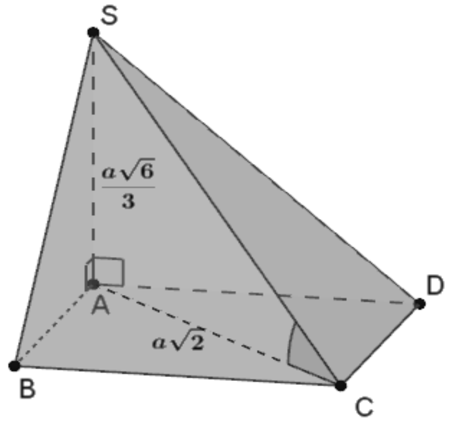
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}.$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa SC và $(ABCD)$.

Tam giác SAC vuông tại A nên

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0.$$

Chọn đáp án **A.**



Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mp $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

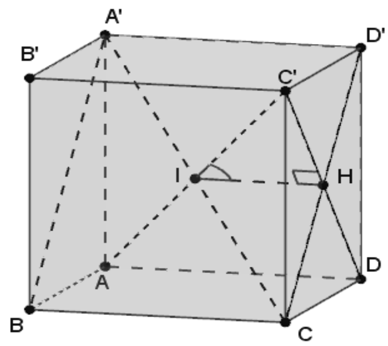
A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $\begin{cases} A'C \cap AC' = I \\ C'D \cap CD' = H \end{cases}$

mà $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' lên $(A'BCD') \Rightarrow \widehat{C'IH}$ là góc giữa AC' và $(A'BCD')$. Mà $\tan\widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{1}{\sqrt{2}}.2 = \sqrt{2}.$

Chọn đáp án **D.**



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi HK và $mp(SBC)$ là?

A. $65°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Hướng dẫn giải::

Gọi $I = AH \cap BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$ và $K \in SI$.

Ta lại có $\begin{cases} SB \perp CK \\ SB \perp CH \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHK) \Rightarrow (SBC) \perp (CHK)$.

Mà $HK = (SAI) \cap (SHK)$, suy ra $HK \perp (SBC)$

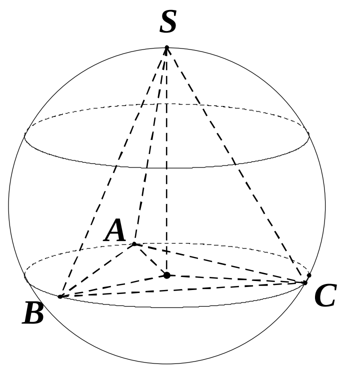
→ Chọn đáp án **B.**

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. H là trực tâm tam giác ABC.
B. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Do hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $SH \perp (ABC)$ nên SH là trục của hình chóp $S.ABC$. $\Rightarrow HA = HB = HC$. Nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Vậy chọn **C.**



Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Hướng dẫn giải:

$AM = BM = \frac{a}{2}, SB = a$

Có $SM \perp (ABC)$ nên AM là hình chiếu của SA lên $mp(ABC)$

$\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, AM) = \widehat{SAM}$.

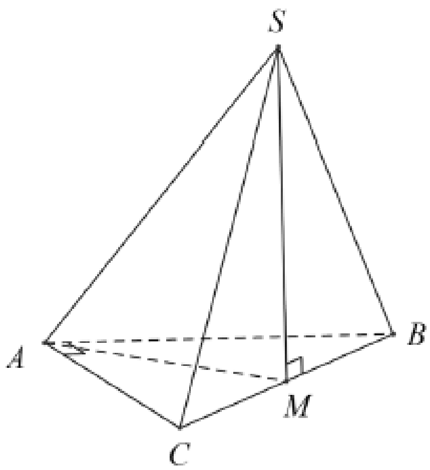
Áp dụng định lý Pytago

$SM = \sqrt{SB^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SAM có

$\tan\widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^0$.

Vậy chọn **C.**



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở B. AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $SA \perp BC.$ **B.** $AH \perp BC.$ **C.** $AH \perp AC.$ **D.** $AH \perp SC.$

Hướng dẫn giải:

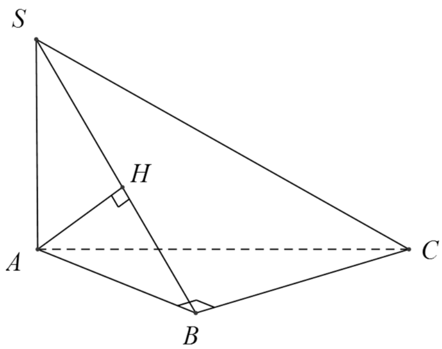
Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Nên Phương án A đúng.

Có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Phương án D đúng.

Suy ra $AH \perp BC$, $AH \perp SC$. Phương án B, D đúng.

Phương án C sai. Thật vậy với $AH \perp AC$, ta có $\begin{cases} AH \perp AC \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Vậy chọn **C.**



Câu 16: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Hướng dẫn giải:

Chọn **B.**

Câu 17: Cho góc tam diện $Sxyz$ với $\widehat{xSy}=120^0$, $\widehat{ySz}=60^0$, $\widehat{zSx}=90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $SA=SB=SC=a$. Tam giác ABC có đặc điểm nào trong các số các đặc điểm sau :

A. Vuông cân.
B. Đều.
C. Cân nhưng không vuông.
D. Vuông nhưng không cân.

Hướng dẫn giải:

Xét ΔSAB có $AB^2=SA^2+SB^2-2SA.SB.\cos\widehat{ASB}=3a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{3}$.

ΔSBC đều $\Rightarrow BC=a.$

ΔSAC có $AB=\sqrt{SA^2+SC^2}=a\sqrt{2}$.

Từ đó ΔABC vuông tại C.

Vậy chọn **D.**

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của $ABCD$ và I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

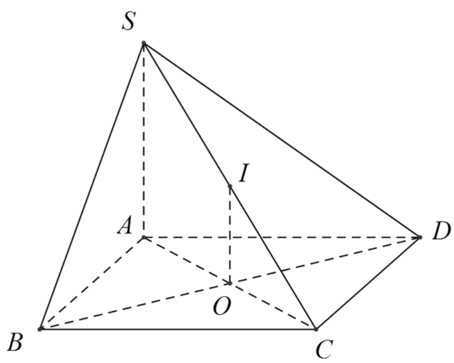
A. $IO\perp(ABCD)$.

B. $BC\perp SB.$

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn $BD.$

D. Tam giác SCD vuông ở $D.$

Hướng dẫn giải:



Có IO là đường trung bình tam giác SAC nên $IO//SA$ nên $IO\perp(ABCD)$. Phương án A đúng.

Có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Phương án B đúng

Và $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$ nên phương án D đúng.

Phương án C sai. Thật vậy nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD $\Rightarrow BD\perp AC$ (vô lý).

Vậy chọn **C.**

Câu 19: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A\in(\alpha)$ và mỗi điểm $B\in(\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Hướng dẫn giải:

Phương án A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
Phương án B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.
Phương án C sai.
Vậy chọn **D.**

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $mp(SAB)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\alpha=30^0$. **D.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Hướng dẫn giải:

Do $BC\perp(SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC lên (SAB)

$\Rightarrow(SC,(SAB))=(SC,SB)=\widehat{BSC}$

Xét tam giác SBC có

$\tan\widehat{BSC}=\frac{BC}{SB}=\frac{a}{a\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy chọn **B.**

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABDC$, với đáy $ABDC$ là hình bình hành tâm $O; AD,SA,AB$ đôi một vuông góc $AD=8, SA=6$. (P) là mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. 20. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 36.

Hướng dẫn giải:

Thiết diện là hình thang vuông đi qua trung điểm các cạnh $AB;CD;CS;SB$, nên diện tích thiết diện là

$$dt=\frac{(BC+\frac{1}{2}BC).\frac{1}{2}SA}{2}=\frac{(8+4)6}{2}=36$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Độ dài SG là:

A. $\frac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Theo bài ra hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $SG\perp(ABC), G\in AH$.

Mặt khác ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}, SH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$

$$\to SG=SA.\sin\widehat{SAG}=b.\sqrt{1-(\frac{AG}{SA})^2}=b\sqrt{1-\frac{\frac{a^2}{3}}{b^2}}=\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}$$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $b > a\sqrt{2}$. **B.** $b < a\sqrt{2}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a > b\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Để C_1 nằm giữa S và C thì $\widehat{ASC} < 90^0 \to \cos\widehat{ASC} > 0 \leftrightarrow \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} > 0 \leftrightarrow b\sqrt{2} > a$

Chọn đáp án C

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc. Điểm cách đều A, B, C, D là:

A. Trung điểm BC. **B.** Trung điểm AD. **C.** Trung điểm AC. **D.** Trung điểm AB.

Hướng dẫn giải:

Sử dụng tính chất trung điểm của tam giác vuông

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $SO \perp (ABCD)$. **D.** $CD \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải:

Do hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA = SC, SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao AH vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và $mp(SAD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm AS, suy ra $BI \perp (SAD) \to \alpha = \widehat{IDB}$. Ta có: $BI = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, BD = AB\sqrt{2}$. Suy ra

$\sin\alpha = \frac{BI}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và $mp(BCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải::

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(BCD)$, a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD$.

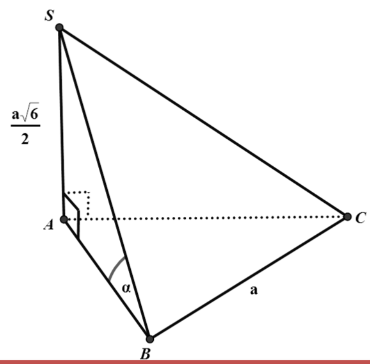
Ta có $\alpha = \widehat{ABH}$, $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\to$ Chọn đáp án **A.**

Câu 28: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và (ABC).

A. 75^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải:

$\widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SBA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^o$



Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp$(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45^0$ **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **D.** $\alpha = 30^0$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\widehat{AC_1,(ABCD)} = \widehat{CAC_1} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$S \in (SAB) \Rightarrow S$ là hình chiếu của S trên (SAB) (1)

$\begin{cases} BC \perp AB & (t/c\ HV) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

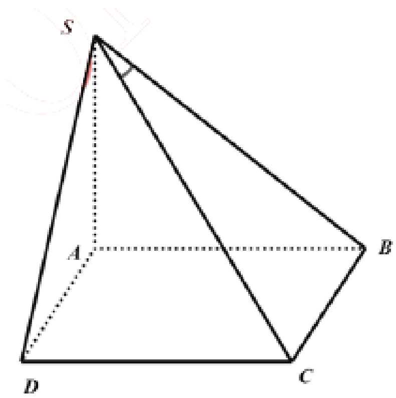
$\Rightarrow$ B là hình chiếu của C trên (SAB) (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow \left[\widehat{SC,(SAB)}\right] = \left(\widehat{SC,SB}\right) = \widehat{BSC} = \alpha$

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Xét tam giác SBC vuông tại B ta có: $\tan\alpha = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 31: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SOB} = \frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 75^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Hướng dẫn giải:

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi SC và (BHK) là:

A. 45^0. **B.** 120^0.

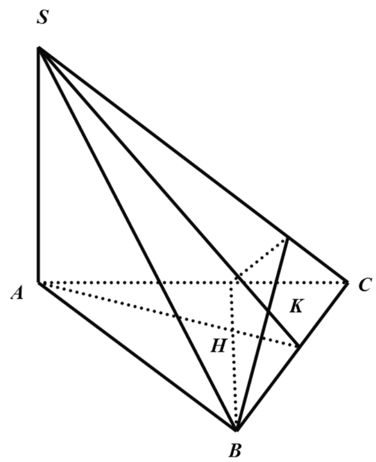
C. 90^0. **D.** 65^0.

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$\begin{cases} BH \perp AC & (gt) \\ BH \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Mà $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

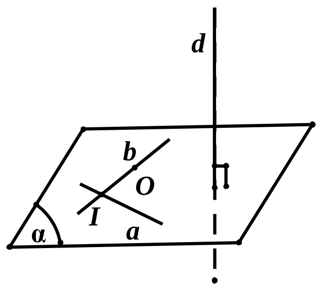


Vậy chọn đáp án C .

DẠNG 3: THIẾT DIỆN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN.

Phương pháp:

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:



Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song như đã biết ở (dạng 2, §2 chương II).

Cách 2. Ta dựng mặt phẳng (α) như sau:

Dựng hai đường thẳng a,b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.

Câu 130: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là:

A. Hình thang vuông. **B.** Tam giác đều. **C.** Tam giác cân. **D.** Tam giác vuông.

Hướng dẫn giải:

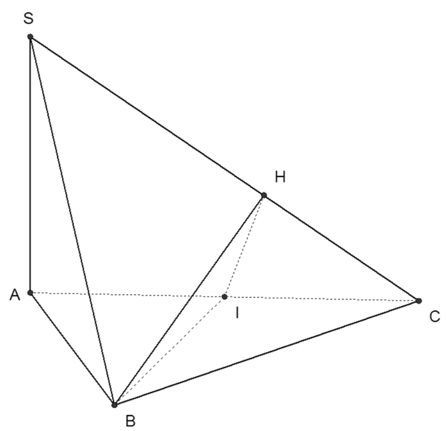
Gọi I là trung điểm của AC, kẻ $IH\perp SC$.

Ta có $BI\perp AC, BI\perp SA \Rightarrow BI\perp SC$.

Do đó $SC\perp(BIH)$ hay thiết diện là tam giác BIH.

Mà $BI\perp(SAC)$ nên $BI\perp IH$ hay thiết diện là tam giác vuông.

Chọn D.



Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a=12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. **B.** 40. **C.** $36\sqrt{3}$ **D.** 36.

Hướng dẫn giải:

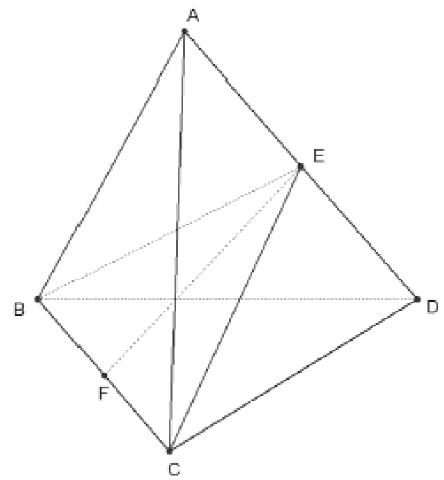
Thiết diện là tam giác BCE, với E là trung điểm của AD. Gọi F là trung điểm của BC.

Ta có $BE = CE = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$;

$EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = 6\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là:

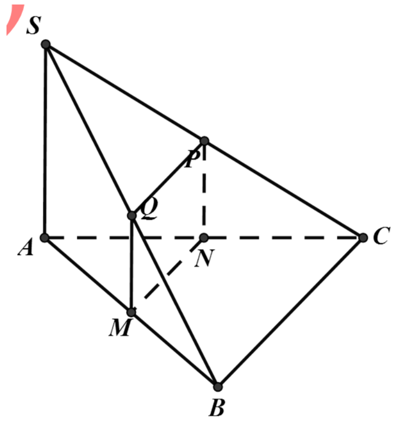
$S = \dfrac{1}{2}EF.BC = 36\sqrt{2}$.



Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ?

A. Hình thang vuông. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$

Vậy $\begin{cases} BC \perp SB \\ (P) \perp SB \end{cases} \Rightarrow (P)//BC\,(1).$

Mà $(P) \cap (ABC) = MN\,(2).$

Từ $(1);(2) \Rightarrow MN//BC$

Tương tự ta có $PQ//BC; PN//SA$

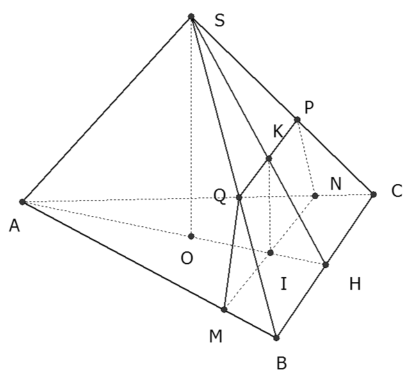
Mà $SA \perp BC \Rightarrow PN \perp NM$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại N.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình thang cân **B.** Hình thang vuông **C.** Hình bình hành **D.** Tam giác vuông

Hướng dẫn giải:



Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên (P) song song với SO

Suy ra (P) cắt (SAH) theo giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SO cắt SH tại K

Từ giả thiết suy ra (P) song song BC, do đó (P) sẽ cắt $(ABC), (SBC)$ lần lượt là các đường thẳng qua I và K song song với BC cắt AB, AC, SB, SC lần lượt tại M, N, Q, P. Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra I là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ, lại có các tam giác ABC đều và tam giác SBC cân tại S suy ra IK vuông góc với MN và PQ dó đó $MNPQ$ là hình thang cân.

Chọn đáp án **A.**

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$ $(a>b\sqrt{2})$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{2b}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{4b}$

.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $AI\perp SC\Rightarrow (AIB)\perp SC$. Thiết diện là tam giác AIB.

Ta có $AI=AC\sin\widehat{ACS}=a\sqrt{1-\cos^2\widehat{ACS}}=a\sqrt{1-\left(\dfrac{a^2+b^2-b^2}{2ab}\right)}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$

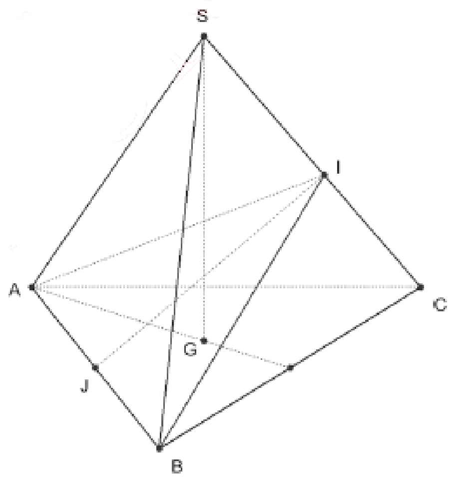
Gọi J là trung điểm của AB. Dễ thất tam giác AIB cân tại I, suy ra $IJ\perp AB$.

$IJ=\sqrt{AI^2-AJ^2}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Do đó:

$S=\dfrac{1}{2}AB.IJ=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

Chọn A.



Câu 5: Tam giác ABC có $BC=2a$, đường cao $AD=a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SB và SC. Diện tích tam giác AEF bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$ **C.** $\dfrac{1}{2}a^2$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

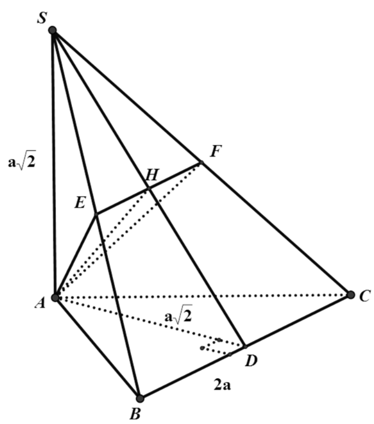
Hướng dẫn giải:

Do $AD\perp BC, SA\perp BC\Rightarrow BC\perp (SAD)\Rightarrow BC\perp AH\Rightarrow EF\perp AH$

$\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}EF.AH$

Mà $EF=\dfrac{1}{2}BC=a$. Do H là trung điểm $SD\Rightarrow AH=a$

$\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}a^2$



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a, SA\perp(ABC), SA=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) có diện tích bằng?

A. $\frac{3a^2}{8}$. **B.** $\frac{3a^2}{2}$.

C. $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{2a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC thì $BC\perp AM$ (1).

Hiển nhiên $AM=a\sqrt{3}$.

Mà $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA(2)$.

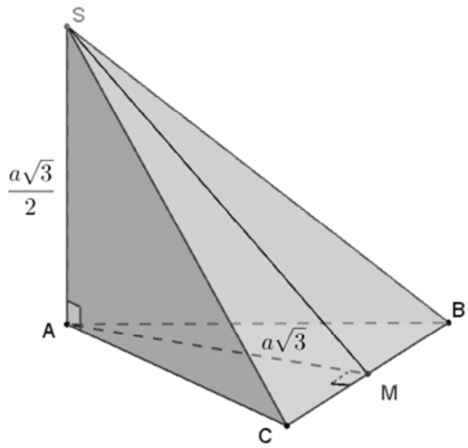
Từ (1) và (2) suy ra $BC\perp(SAM)\Rightarrow(P)\equiv(SAM)$

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) chính là ΔSAM.

ΔSAM vuông tại A nên

$S_{\Delta SAM}=\frac{1}{2}SA.AM=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}=\frac{3a^2}{4}$.

Chọn đáp án **C.**



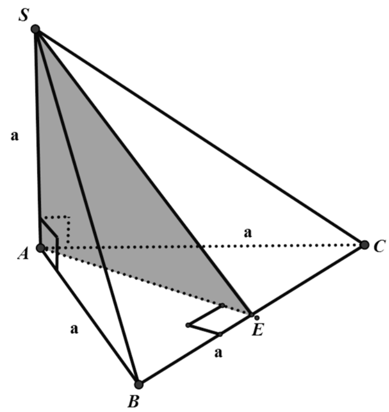
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC), SA=a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng ?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^2}{6}$ **C.** $\frac{a^2}{2}$ **D.** a^2

Hướng dẫn giải:

Kẻ $AE\perp BC, SA\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAE)\equiv(P)$

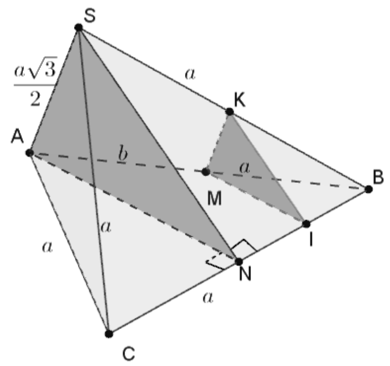
Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác SAE có diện tích : $S_{\Delta SAE}=\frac{1}{2}SA.AE=\frac{1}{2}a.a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Câu 8: Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh $a, SA=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM=b$ $(0<b<a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng?

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.	**B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.	**C.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.	**D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Hướng dẫn giải:



Gọi N là trung điểm của BC.

$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN)$.

Theo bài ra $BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P)//(SAN) \end{cases}$.

Kẻ $MI//AN, MK//SA \Rightarrow$ Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ là ΔKMI.

$\begin{cases} \Delta ABC \\ \Delta SBC \end{cases}$ là hai tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AN = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAN$ là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta KMI$ là tam giác đều cạnh $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a-b}{a} \Rightarrow S_{\Delta KMI} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, AP là đường cao của tam giác ACD. Mặt phẳng (P) qua B vuông góc với AP cắt mp(ACD) theo đoạn giao tuyến có độ dài bằng ?

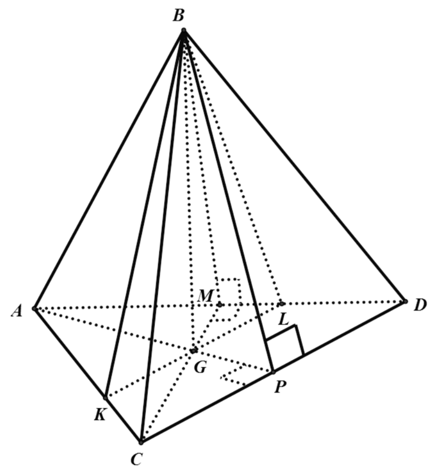
A. 9	**B.** 6	**C.** 8	**D.** 7

Hướng dẫn giải:

Ta có : $CD \perp AP, CD \perp BP \Rightarrow CD \perp (APB) \Rightarrow BG \perp CD$

Tương tự : $AD \perp CM, AD \perp BM \Rightarrow AD \perp (BCM) \Rightarrow AD \perp BG$

Suy ra : $BG \perp (ABC) \Rightarrow BG \perp AP$



Kẻ KL đi qua trọng tâm G của ΔACD và song song với CD $\Rightarrow AP \perp KL$ $\Rightarrow (P)$ chính là mặt phẳng (BKL)

$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$

Có thể nói nhanh theo tính chất tứ diện đều:

Gọi G là trọng tâm ΔACD thì G là tâm ΔACD và $BG \perp (ACD)$

Trong $mp(ACD)$ kẻ qua G đường thẳng song song với CD cắt AC, AD lần lượt tại K, L

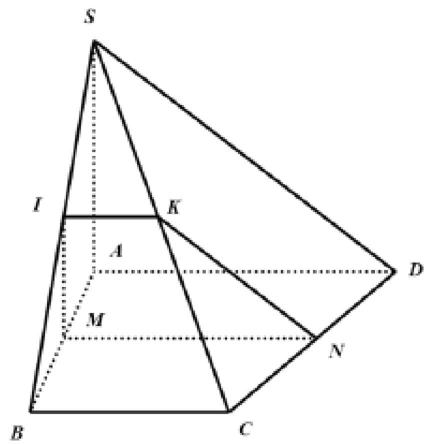
Ta có $(BKL) \perp (ACD), AP \perp KL \Rightarrow AP \perp (BKL)$. Vậy $(P) \equiv (BKL)$

$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. 10.	**B.** 20.	**C.** 15.	**D.** 16.

Hướng dẫn giải:



Do $(P)\perp AB \Rightarrow (P)\parallel SA$

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset (P)$

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK$

$\Rightarrow IK \subset (P)$

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3$

IK là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7$

Khi đó $S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2}.MI = \frac{3+7}{2}.3 = 15$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 11: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$.

a) Khẳng định nào đúng nhất? H là trực tâm của ΔABC.

A. H là trực tâm của ΔABC.
B. H là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.
C. H là trọng tâm của ΔABC.
D. H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác gì?

A. ΔABC là tam giác nhọn.
B. ΔABC là tam giác tù
C. ΔABC là tam giác vuông
D. ΔABC là tam giác cân

c) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất? $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

A. $S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S^2_{\Delta OAB} + \frac{1}{2}S^2_{\Delta OBC} + \frac{1}{2}S^2_{\Delta OCA}$
B. $\frac{1}{2}S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$
C. $\frac{1}{3}S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$
D. $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$.

A. M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG, trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC

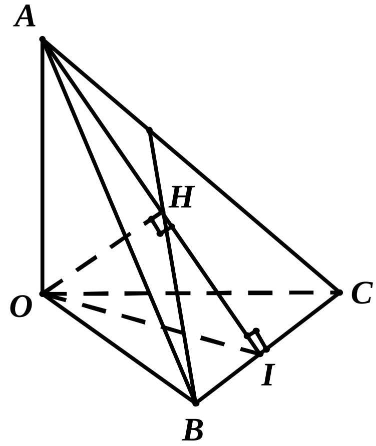
B. M thuộc mặt phẳng đi qua I và song song với OG,trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và. là trọng tâm của tam giác ABC

C. M thuộc mặt phẳng đi qua O và vuông góc với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

D. M thuộc mặt phẳng đi qua O và song song với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

Hướng dẫn giải:.

a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$



Lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$

Vậy $\left.\begin{matrix} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (OAH)$

$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow BH \perp AC \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Ta có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Tương tự $AC = \sqrt{a^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}}$$

$= \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}} > 0$ suy ra $\widehat{A}$ nhọn.

Tương tự các góc B, C nhọn.

c) Ta có $S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}AI^2BC^2 = \frac{1}{4}(OI^2 + OA^2)(OB^2 + OC^2)$

$= \frac{1}{4}OI^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2OB^2 + \frac{1}{4}OA^2OC^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})^2$

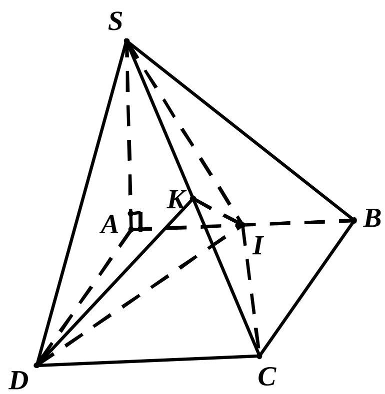
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG$ (do $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$)

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Tính IK.

A. $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $IK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

***Hướng dẫn giải:*.**



Ta có $IS = \sqrt{AI^2 + AS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ Tương tự

$ID = IC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra

$IS = ID = IC$ nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D, lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó $KI \perp (SCD)$.

Ta có $IK^2 = ID^2 - DK^2 = ID^2 - \frac{1}{4}SC^2 = ID^2 - \frac{1}{4}(SA^2 + AC^2)$

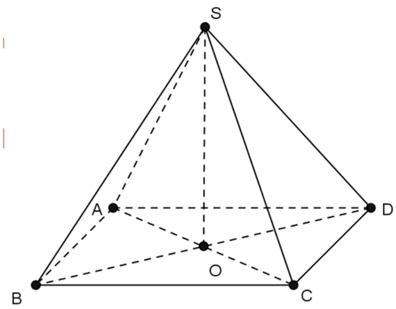
$\frac{5a^2}{4} - \frac{1}{4}(a^2 + 2a^2) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng $45°$. Tính độ dài SO.

A. $SO = a\sqrt{3}$.   **B.** $SO = a\sqrt{2}$.   **C.** $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.   **D.** $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} = 45°$.

Do đó ΔSAO vuông cân tại O nên $SO = AO = a\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA, DB, DC với mặt phẳng (ABC).

Tìm Giá trị nhỏ nhất của $M = (2 + \cot^2\alpha)(2 + \cot^2\beta)(2 + \cot^2\gamma)$.

A. 64   **B.** 8   **C.** 1   **D.** $64\sqrt{2}$

***Hướng dẫn giải:*.**

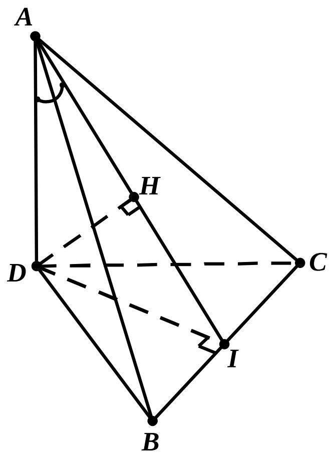
Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Và $\widehat{(DA,(ABC))} = \widehat{(DA, AH)} = \widehat{DAH} = \alpha$

Đặt $DA = a, DB = b, DC = c$

Gọi $I = AH \cap BC$ thì DI là đường cao của tam giác DBC nên



$DI = \frac{DB.DC}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

$\cot^2\alpha = \frac{DA}{DI} = \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2}$

$\Rightarrow 2 + \cot^2\alpha = 2 + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{b^2c^2} \geq 2 + \frac{2a^2}{bc} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$ Vậy

$2 + \cot^2\alpha \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$ (1)

Tương tự $2 + \cot^2\beta \geq \frac{4b}{\sqrt{ac}}$ (2) và $2 + \cot^2\gamma \geq \frac{4c}{\sqrt{ab}}$ (3)

Nhân theo vế các BĐT $(1),(2),(3)$ ta được $\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right)\ge 64$ (đpcm)

Câu 15: Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông
B. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông cân
C. tam giác ACM vuông tại A.
D. tam giác ACM vuông cân tại M.

b) Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $AC\perp(BHK)$. **B.** $BH\perp AC$ **C.** A, B đều đúng **D.** A, B đều sai

c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động.

A. H thuộc đường tròn đường kính BK.
B. H thuộc đường tròn đường kính AC.
C. H thuộc đường tròn đường kính BM.
D. H thuộc đường tròn đường kính AB.

d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất.

A. $M\equiv C$ **B.** $M\equiv B$
C. $M\equiv H$ **D.** $M\equiv K$

e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất.

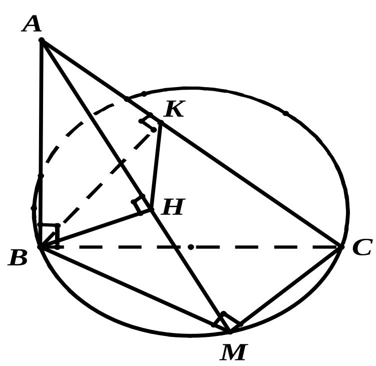
A. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $2\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

B. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{1}{2}\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

C. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $3\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

D. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Hướng dẫn giải:.



a) Ta có $AB\perp(\alpha)\Rightarrow\begin{cases}AB\perp BM\\AB\perp BC\end{cases}$ suy ra các tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có $\begin{cases}MC\perp MB\\MC\perp AB\end{cases}\Rightarrow MC\perp(ABM)$

$\Rightarrow MC\perp AM$ hay tam giác ACM vuông tại M.

b) Ta có $\begin{cases}BH\perp AM\\BH\perp MC\end{cases}\Rightarrow BH\perp(ACM)$

$\Rightarrow BH\perp AC$.

Vậy $\left.\begin{matrix}AC\perp BH\\AC\perp BK\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC\perp(BHK)$.

c) Dễ thấy BK cố định và $\widehat{BHK}=90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK.Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d) $MA^2=AB^2+BM^2$ mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất $\Leftrightarrow BM=BC\Leftrightarrow M\equiv C$.

e) Ta có $S_{BHK}=\frac{1}{2}BH.HK\le\frac{BH^2+HK^2}{4}=\frac{BK^2}{4}$ không đổi nên

$\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow BH=HK$, lúc này ΔHBK vuông cân tại H nên $BH=\frac{BK}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2};\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}$

nên $2\left(\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}\right)=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BA^2}\Leftrightarrow\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{2}{BC^2}$

$\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Vậy $\max S_{BHK}=\frac{BK^2}{4}\Leftrightarrow\Leftrightarrow MB=\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}\Leftrightarrow$ M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a,BC=a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD=a\sqrt{5}$.

a) Tính SA.

A. $SA=a$ **B.** $SA=2a$ **C.** $SA=3a$ **D.** $SA=4a$

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB,CD lần lượt tại I,J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC.Gọi K,L là các giao điểm K,L của SB,SD với (HIJ).

Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

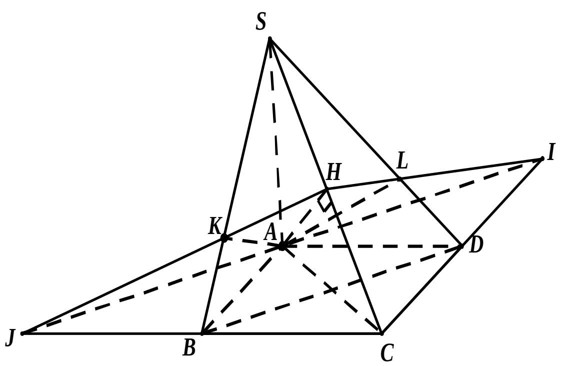
A. $AK\perp(SBC)$, **B.** $AL\perp(SCD)$ **C.** $AK\perp SC$ **D.** Cả A, B, C đều đúng

Hướng dẫn giải:.

a) ΔSBC vuông tại $B\Rightarrow BC\perp SB$ mà $BC\perp AD\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp SA$.

Tương tự ta có $SA\perp CD$ nên $SA\perp(ABCD)$.



Ta có

$SC=\sqrt{DS^2+DC^2}=a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SB=\sqrt{SC^2-BC^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Vậy $SA=a$.

b) Do $\begin{cases}IJ\perp AC\\IJ\perp SA\end{cases}\Rightarrow IJ\perp(SAC)\Rightarrow IJ\perp SC$

Lại có $AH\perp SC\Rightarrow(HIJ)\perp SC\Rightarrow AK\perp SC\quad(1)$

Dễ thấy $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AK\quad(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AK\perp(SBC)$.

Lập luận tương tự ta có $AL\perp(SCD)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a, SA=a\sqrt{3}$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM=x$ $(0<x<a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB

Giả sử thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α) là tứ giác $MNPQ$.

a) Hỏi tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình chữ nhật **B.** hình vuông **C.** hình thang **D.** hình bình hành

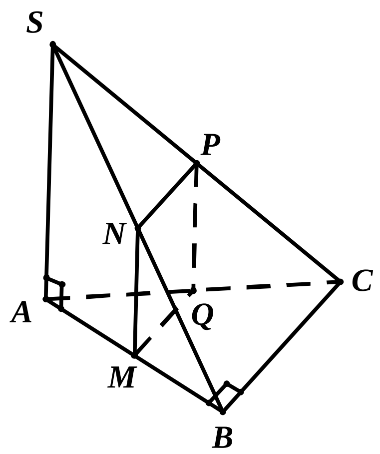
b) Tìm x để diện tích thiết diện $MNPQ$ lớn nhất.

A. $x=\frac{a}{2}$ **B.** $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** $x=\frac{3a}{2}$ **D.** $x=a$

***Hướng dẫn giải:*.**

. Ta có $\begin{cases}(\alpha)\perp AB\\ SA\perp AB\end{cases}\Rightarrow SA\,||\,(\alpha)$

Do đó $\begin{cases}M\in(SAB)\cap(\alpha)\\ SA\subset(SAB)\\ SA\,||\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MN\,||\,SA$ Tương tự



$\begin{cases}(\alpha)\perp AB\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\,||\,(\alpha)$

$\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ABC)\\ BC\subset(ABC)\\ BC\,||\,(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MQ\,||\,BC, Q\in AC$

$\begin{cases}N\in(SBC)\cap(\alpha)\\ BC\subset(SBC)\\ BC\,||\,(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=NP\,||\,BC, P\in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $MN\,||\,SA, PQ\,||\,SA\Rightarrow MN\,||\,PQ$ và $MQ\,||\,BC, NP\,||\,BC\Rightarrow MQ\,||\,NP$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases}MN\,||\,SA\\ NP\,||\,BC\\ SA\perp BC\end{cases}\Rightarrow MN\perp NP$. Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MQ=AM=x$, $\frac{MN}{SA}=\frac{MB}{AB}\Rightarrow MN=\frac{MB.SA}{AB}=\frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ}=MN.MQ=\sqrt{3}(a-x)x=\sqrt{3}[\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2]\le\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x=\frac{a}{2}$.

Câu 18: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng $45°$. Tính độ dài SO.

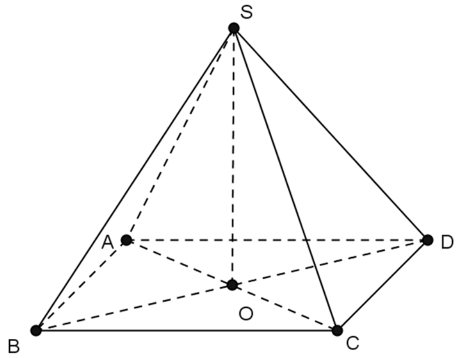
A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = a\sqrt{2}$. **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} = 45°$.

Do đó ΔSAO vuông cân tại O nên $SO = AO = a\sqrt{2}$.



Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài AD:

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$. **D.** $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

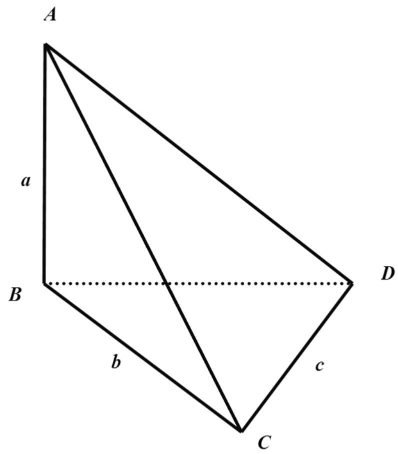
Hướng dẫn giải::

Ta có: $BC \perp CD \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2+CD^2} = \sqrt{b^2+c^2}$

Mặt khác: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD$

$AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Giả sử tồn tại tiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $S = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$

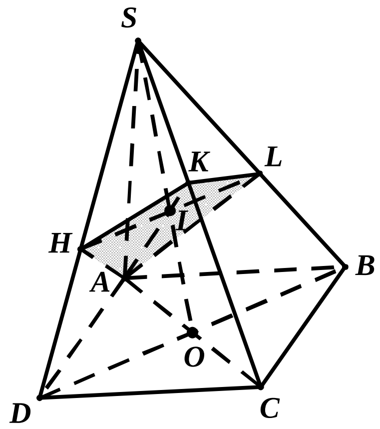
***Hướng dẫn giải:*.**

Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì $K \in (\alpha)$.Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AK$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$, mặt khác $(\alpha) \perp SC$ nên $BD \parallel (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ BD \parallel (\alpha) \end{cases}$



$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = HL \parallel BD, H \in SD, L \in SB$

Thiết diện là tứ giác $AHKL$.

b) Do $\begin{cases} HL \parallel BD \\ BD \perp AK \end{cases} \Rightarrow HL \perp AK \Rightarrow S_{AHKL} = \dfrac{1}{2} AH.KL$

Ta có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại., mà $AK \perp SC$ nên K là trung điểm của $SC \Rightarrow AK = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

$HL \parallel BD \Rightarrow \dfrac{HL}{BD} = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HL = \dfrac{2}{3} BD = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

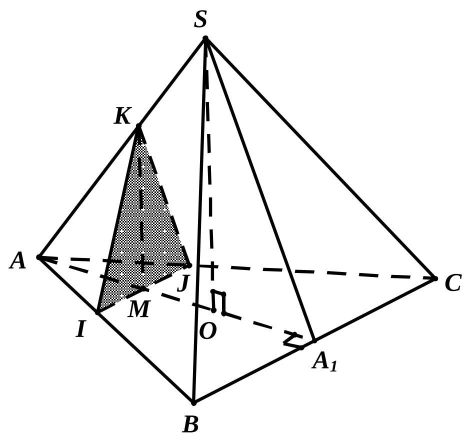
Vậy $S_{AHKL} = \dfrac{1}{2} a.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$. Giả sử tồn tại thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

Giả sử tính được diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

A. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ **B.** $x = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $x = \dfrac{3a}{8}$ **D.** $x = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$

***Hướng dẫn giải:*.**



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm tam giác ABC).Do đó $SO \perp AA_1$ mà $(\alpha) \parallel AA_1 \Rightarrow SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$

Trường hợp 1. $x = 0$ thì thiết diện là điểm A.

Trường hợp 2. $0 < x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ thì M thuộc đoạn $AO(M \ne A)$.

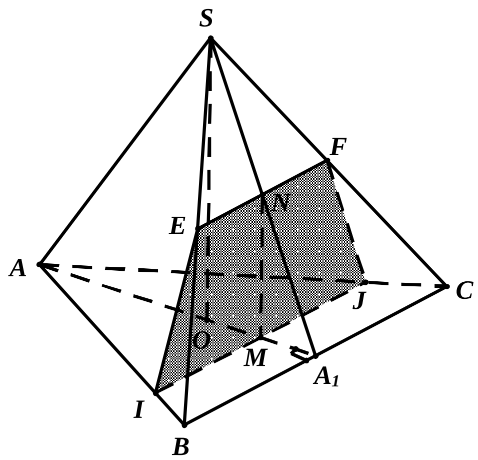
Ta có :

$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC, I \in AB, J \in AC$

Tương tự $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MK \parallel SO, K \in SA$.

Thiết diện là tam giác KIJ.

Trường hợp 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó M thuộc đoạn $OA(M \neq 0; M \neq A)$



Tương tự như trường hợp trên ta có:

$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC,$
.
$I \in AB, J \in AC$

$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MN \parallel SO, N \in SA_1.$

$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = EF \parallel IJ, N \in EF$

Thiết diện là tứ giác $IJEF$.

Trường hợp 4. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$x = 0 \Rightarrow S_{td} = 0$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{td} = 0$

$0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$, thì $S_{IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK$.

Ta có $IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$

Tương tự $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{IJK} = \frac{1}{2} \frac{2x\sqrt{3}}{3} .2x\sqrt{3} = 2x^2$.

$\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{2}}{3}$, dễ thấy $IJEF$ là hình thang nên $S_{IJEF} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$

$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$, $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow EF = 2(x\sqrt{3} - a)$

$$\frac{MN}{SO}=\frac{MA_1}{OA_1}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}\Rightarrow MN=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$$

Vậy $S_{IJEF}=\frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3}-3a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$.

Xét các trường hợp ta thấy S_{td} lớn nhất trong trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3}<x<\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\max S_{IJEF}=\frac{3a^2}{4}$ khi $x=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α,β. Giả sử ∂ là độ lớn góc giữa đường cao CK với (P). Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $\sin\partial=\sqrt{2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta}$ **B.** $\sin\partial=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$

C. $\sin\partial=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **D.** $\sin\partial=2\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$

***Hướng dẫn giải:*.**

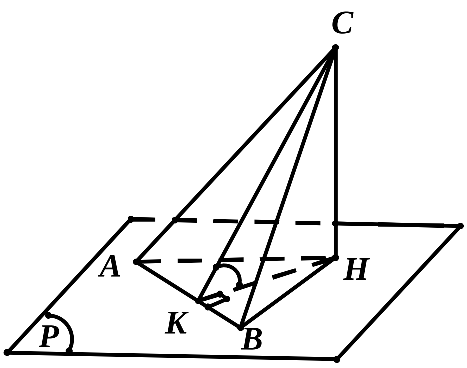
Kẻ $CH\perp(P)$ thì $\widehat{CKH}$ là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$\widehat{(CA,(P))}=\widehat{CAH}=\alpha,\widehat{(CB,(P))}=\widehat{CBH}=\beta$

Đặt $CH=h$, ta có $CA=\frac{h}{\sin\alpha},CB=\frac{h}{\sin\beta}$

$$AB^2=CA^2+CB^2=\frac{h^2}{\sin^2\alpha}+\frac{h^2}{\sin^2\beta}$$

$$=h^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right).$$



Xét tam giác ABC có $CK.AB=CA.CB$

$$\Rightarrow CK=\frac{CA.CB}{AB}=\frac{\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{h}{\sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)}}$$

$$=\frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}.$$

Ta có $\sin\widehat{CKH}=\frac{CH}{CK}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO\perp(ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a)Tính SA khi $HB=\frac{a}{2}$

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với $(ABCD)$.

A. $\varphi = \arctan\sqrt{\frac{3}{5}}$ **B.** $\varphi = \arctan\sqrt{\frac{3}{7}}$

C. $\varphi = \arctan\sqrt{\frac{3}{8}}$ **D.** $\varphi = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$

Hướng dẫn giải:.

a) Dễ thấy $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAO} = \varphi$ nên $SO = SA\cos\varphi$ (1).

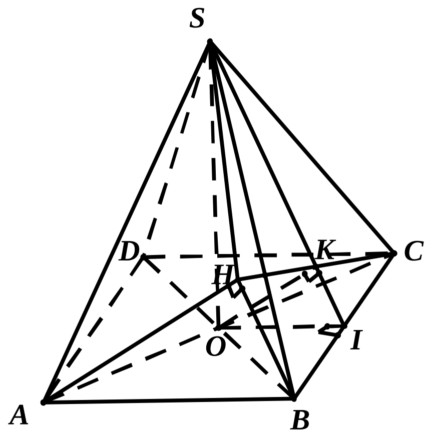
Gọi I là trung điểm của BC thì ta có $\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIO)$

Kẻ $OK \perp SI$ thì $OK \perp BC$ nên $OK \perp (SBC)$.

Kẻ $At \parallel OK$ cắt CK tại H, khi đó ta có

$\begin{cases} AH \parallel CK \\ CK \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$ nên $\widehat{(SA,(SBC))} = \widehat{SAH} = \varphi$ do đó $AH = SA\cos\varphi$ (2).

Từ $(1),(2)$ ta có $AH = SO$.



Khi $BH = \frac{a}{2}$ thì trong tam giác vuông HAB có

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow SO = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

b) $\tan\varphi = \frac{SO}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \varphi = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

A. $SA = a\sin\alpha$ **B.** $SA == a\cos\alpha$

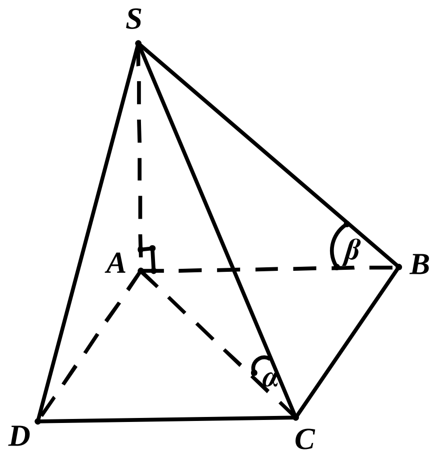
C. $SA = a\tan\alpha$ **D.** $SA = 2a\sin\alpha$

b) Tính AB

A. $\frac{1}{2}a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ **B.** $2a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

C. $3a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ **D.** $a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

Hướng dẫn giải:.



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))}$

$= \widehat{SAC} = \alpha$.

Tương tự $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{SBC} = \beta$.

$SA = SC\sin\alpha = a\sin\alpha$

b) $SB = SC\sin\beta = a\sin\beta$

$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2\sin^2\beta - a^2\sin^2\alpha}$

$= a\sqrt{\dfrac{1-\cos2\beta}{2} - \dfrac{1-\cos2\alpha}{2}}$.

$= a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

Câu 25: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tứ diện. Gọi A, B, C là ba góc tương ứng của tam giác ABC .

Đặt $\alpha = \widehat{AOH}, \beta = \widehat{BOH}, \gamma = \widehat{COH}$. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin C}$

B. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin 2C}$

C. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin C}$

D. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

***Hướng dẫn giải:*.**

(HS tự giải)

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BDC} = 90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC .

a) Tính $\widehat{CDA}$.

A. $\widehat{CDA} = 60^0$ **B.** $\widehat{CDA} = 90^0$ **C.** $\widehat{CDA} = 45^0$ **D.** $\widehat{CDA} = 30^0$

b)Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

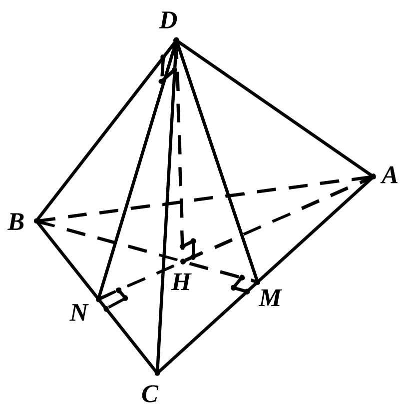
A. $6(DA^2 + DB^2 + DC^2) \ge (AB + BC + CA)^2$

B. $6(DA^2 + DB^2 + DC^2) \ge 5(AB + BC + CA)^2$

C. $3(DA^2 + DB^2 + DC^2) \ge (AB + BC + CA)^2$

D. $2(DA^2 + DB^2 + DC^2) \ge 3(AB + BC + CA)^2$

***Hướng dẫn giải:*.**



a) Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH)$

$\Rightarrow BC \perp DA \quad (1)$

Tương tự ta có $(BDH) \perp AC \Rightarrow DB \perp AC$, vì vậy

$\begin{cases} DB \perp DC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow DB \perp (ACD)$

$\Rightarrow DB \perp DA \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $DA \perp (BCD) \Rightarrow DA \perp DC$ ha $\widehat{CDA} = 90^0$.

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện $ABCD$ có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có

$(AB+BC+CA)^2 \le 3(AB^2+BC^2+CA^2)$

Mà $\begin{cases} AB^2 = DA^2 + DB^2 \\ BC^2 = DB^2 + DC^2 \\ CA^2 = DA^2 + DC^2 \end{cases}$ nên $(AB+BC+CA)^2 \le 6(DA^2+DB^2+DC^2)$.

Đẳng thức xảy ra khi $AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ đều, kết hợp với chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được $D.ABC$ là hình chóp đều đỉnh D.

Câu 27: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{MA^2}{OA^2} + \dfrac{MB^2}{OB^2} + \dfrac{MC^2}{OC^2}$.

A. $\min T = 3$ **B.** $\min T = 2$ **C.** $\min T = 4$ **D.** $\min T = 6$

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α, β, γ lần lượt là góc gữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA, OB, OC. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma$

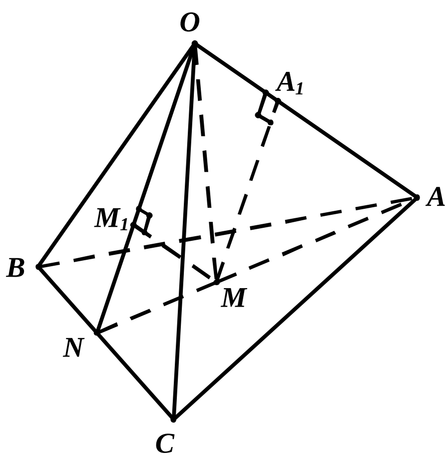
A. $\max A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\max A = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\max A = \dfrac{1}{2}$ **D.** $\max A = 2$

c) Tìm GTNN của $S = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \dfrac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$

A. $\min S = 6\sqrt{3}$ **B.** $\min S = \sqrt{3}$ **C.** $\min S = 6$ **D.** $\min S = 4$

Hướng dẫn giải:.

a) Gọi $N = AM \cap BC$, kẻ $MM_1 \parallel OA$ thì ta có



$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 \parallel OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$

kẻ $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$. Khi đó

$AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2$

$= OM^2 + (AA_1 - OA_1)(AA_1 + OA_1)$

$= OM^2 + OA(OA - 2OA_1)$

$= OM^2 + OA^2 - 2OA.OA_1$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} + 1 - \dfrac{2OA_1}{OA}$ (1).

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$\dfrac{MB^2}{OB^2} = \dfrac{OM^2}{OB^2} + 1 - \dfrac{2OB_1}{OB}$ (2)

$\dfrac{MC^2}{OC^2} = \dfrac{OM^2}{OC^2} + 1 - \dfrac{2OC_1}{OC}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $T = OM^2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right)-2\left(\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}\right)+3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$ nên $T=\frac{OM^2}{OH^2}-2\left(\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}\right)+3$

Mặt khác $\frac{OA_1}{OA}=\frac{NM}{NA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\frac{OB_1}{OB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{OC_1}{OC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\frac{OA_1}{OA}+\frac{OB_1}{OB}+\frac{OC_1}{OC}=1$

Do đó $T=\frac{OM^2}{OH^2}+1\ge 2$ do $OM\ge OH$.

Vậy $\min T = 2$ khi $M\equiv H$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Do A,B,C,M đồng phẳng nên tồn tại x,y,z sao cho $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ $(x+y+z=1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, bình phương vô hướng ta được

$AM^2=(x-1)^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\Rightarrow\frac{MA^2}{OA^2}=(x-1)^2+\frac{y^2b^2}{a^2}+\frac{z^2c^2}{a^2}$.

Tương tự $\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{x^2a^2}{b^2}+(y-1)^2+\frac{z^2c^2}{b^2},\frac{MC^2}{OC^2}=\frac{x^2a^2}{c^2}+\frac{y^2b^2}{c^2}+(z-1)^2$

Vì vậy $T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)+1$

$\ge\left(\frac{1}{a}.ax+\frac{1}{b}.by+\frac{1}{c}.cz\right)^2+1=2$ (Theo Cauchy-Schwarz)

Vậy $\min T=2$.

b) Dễ thấy $\alpha=\widehat{AOH},\beta=\widehat{BOH},\gamma=\widehat{COH}$.

Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}\Leftrightarrow\left(\frac{OH}{OA}\right)^2+\left(\frac{OH}{OB}\right)^2+\left(\frac{OH}{OC}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (1).

Lại có $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\Leftrightarrow\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}=\frac{\cot^2x}{1+\cot^2x}$ $(*)$

Áp dụng CT (*) cho x nhận các giá trị α,β,γ và kết hợp với (1) thu được

$\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}+\frac{\cot^2\beta}{1+\cot^2\beta}+\frac{\cot^2\gamma}{1+\cot^2\gamma}=1$.

Đặt $x=\cot^2\alpha,y=\cot^2\beta,z=\cot^2\gamma$ $(x,y,z>0)$ thì bài toán trở thành

Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$. Chứng minh $xyz\le\frac{1}{8}$.

Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1\Leftrightarrow 1-\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$ (2).

Tương tự ta có :

$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}} (3)$ và $\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$ (4)

Nhân theo từng vế các BĐT $(2),(3)(4)$ ta được $xyz \leq \frac{1}{8}$ $(dpcm)$.

c) Tương tự như câu b) ta có $\min S = 6\sqrt{3}$.

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$
- Giả sử (P) ∩ (Q) = c. Từ I ∈ c, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{(P),(Q)}\right) \le 90^0$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), φ = $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: S′ = S.cosφ

3. Hai mặt phẳng vuông góc

- (P) ⊥ (Q) ⇔ $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$
- **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau:** $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

4. Tính chất

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$
- $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

B – BÀI TẬP

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.
D. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Câu 2: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.
B. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.
C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.
D. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có một cạnh bên vuông góc với đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Có ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau. **B.** Có hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.
C. Có năm cặp mặt phẳng vuông góc với nhau. **D.** Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.
D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì $(P)//a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có bốn mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
B. Nếu hình hộp có ba mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
C. Nếu hình hộp có hai mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
D. Nếu hình hộp có năm mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Câu 6: Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng.

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Nếu hai mặt vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
C. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.
D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Hướng dẫn giải:

Theo Định lí $2(tr109-SGK-HH11-CB)$. Chọn D

Câu 7: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và gọi $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

I. Nếu $a\subset(\alpha)$ và $a\perp d$ thì $a\perp(\beta)$. II. Nếu $d'\perp(\alpha)$ thì $d'\perp d$.

III. Nếu b ⊥ d thì b ⊂ (α) hoặc b ⊂ (β). IV. Nếu (γ) ⊥ d thì (γ) ⊥ (α) và (γ) ⊥ (β).

Các mệnh đề đúng là :

A. I, II và III. **B.** III và IV. **C.** II và III. **D.** I, II và IV.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 8: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 9: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), a là một đường thẳng nằm trên (P). Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Nếu $a//b$ với $b=(P)\cap(Q)$ thì a//(Q).

B. Nếu $(P)\perp(Q)$ thì $a\perp(Q)$.

C. Nếu a cắt (Q) thì (P) cắt (Q).

D. Nếu $(P)//(Q)$ thì $a//(Q)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $b=(P)\cap(Q)$ nếu $a//b$ thì $a//(Q)$. Chọn **B.**

Câu 10: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a\perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha)\perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Câu 11: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải:

Qua M dựng đường thẳng d vuông cóc với (P) và (Q). Khi đó có vô số mặt phẳng xoay quanh d thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Câu 12: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

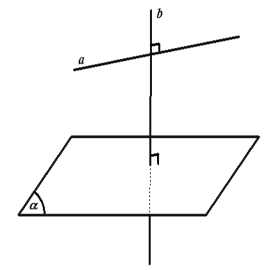
A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

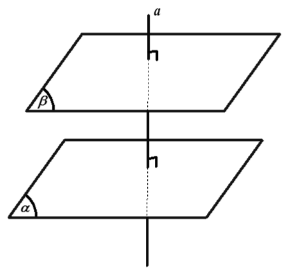
C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

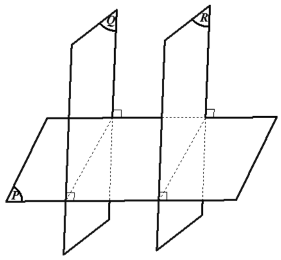
Hướng dẫn giải:



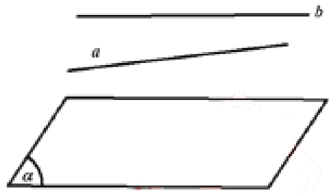
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C sai.



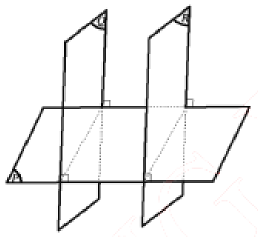
Đáp án D sai.

Chọn A.

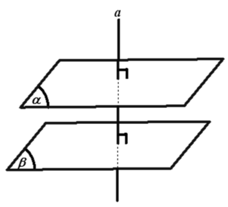
Câu 14: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

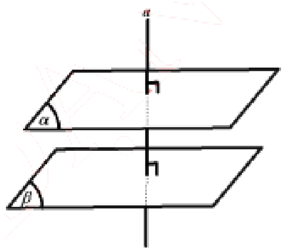
Hướng dẫn giải:



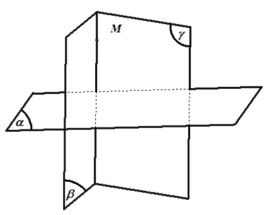
Đáp án A đúng



Qua một đường thẳng có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng B đúng



Đáp án C đúng.



Qua một điểm có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Đáp án D sai.

Câu 15: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

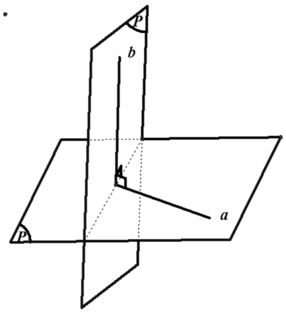
A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

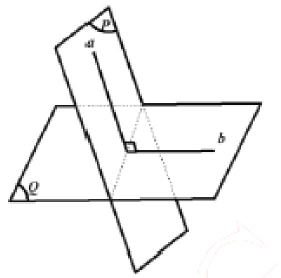
C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

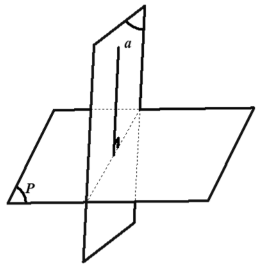
Hướng dẫn giải:



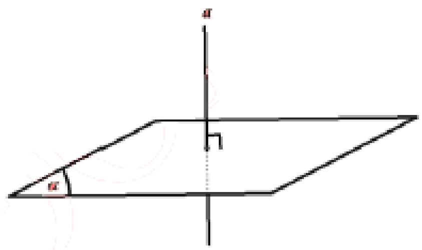
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C đúng.



Đáp án D đúng.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, đường thẳng đó là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau đã cho. Chọn **C.**

Câu 17: Cho a,b,c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$ nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

D. Cho $a//b$, mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Câu 18: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. mặt phẳng (Q) chứa b và đường vuông góc chung của a và b thì mp(Q) $\perp$ a.

B. mặt phẳng (R) chứa b và chứa đường thẳng $b' \perp a$ thì $mp(R) \perp a$.

C. mặt phẳng (α) chứa a, mp(β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. mặt phẳng (P) chứa b thì mặt phẳng $(P) \perp a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Giả sử AB là đoạn vuông góc chung của a và b thì $mp(Q) \equiv (AB,b)$ mà

$a \perp AB,\ a \perp b,\ a \perp (AB,b) \Rightarrow a \perp mp(Q)$

Câu 19: Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a,b,c,d là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

B. Nếu $b \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

D. Nếu $c // m$ thì $c // (\alpha)$ hoặc $c // (\beta)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Do $a \subset (\alpha)$, $a \perp m$, $(\alpha) \perp (\beta)$ nên $a \perp (\beta)$

Câu 20: Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải:

Câu A sai vì a,b có thể trùng nhau.

Câu C sai vì khi a,b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) không vuông góc với a.

Câu D sai vì khi a,b chéo nhau và vuông góc với nhau, ta gọi (α) là mặt phẳng chứa a, song song với b và (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a thì $(\alpha) // (\beta)$

Chọn B.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Mệnh đề A sai vì có thể xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau nhưng đường thẳng thuộc mặt phẳng này song song với mặt phẳng kia.

Mệnh đề B sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng song song.

Mệnh đề C sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc.

Chọn đáp án D

Câu 22: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng không cắt nhau, không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Hướng dẫn giải:

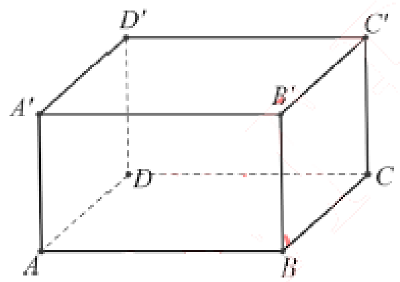
Mệnh đề sai vì còn trường hợp chéo nhau hoặc trùng nhau.
Mênh đề C sai vì còn trường hợp hai đường thẳng chéo nhau.
Mênh đề D sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Chọn B.

Câu 23: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Hướng dẫn giải:



* Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước, chúng nằm trong mặt phẳng đi qua điểm đó và vuông góc với một đường thẳng cho trước ⇒ "Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước": SAI
* Có vô số mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước, trong trường hợp: đường thẳng cho trước vuông góc với mặt phẳng cho trước ⇒:Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI
* Có vố số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ⇒"Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI

Chọn D

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau:
(I) $SA = SB = SC$.
(II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
(III) Tam giác ABC là tam giác đều.
(IV) H là trực tâm tam giác ABC.
Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều?

A. (III) và (IV). **B.** (II) và (III). **C.** (I) và (II). **D.** (IV) và (I).

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân đỉnh S.
B. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.

C. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân.
D. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Câu 26: Trong lăng trụ đều, khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Đáy là đa giác đều.
B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
C. Các cạnh bên là những đường cao.
D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải:

A. Vì lăng trụ đều nên các cạnh bằng nhau. Do đó đáy là đa giác đều.
B. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các mặt bên vuông góc với đáy.
C. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên vuông góc với đáy.
D. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình vuông.
Chọn D.

Câu 27: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Hướng dẫn giải:

Đây là câu hỏi lý thuyết.
Chọn đáp án B

Câu 28: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**
A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
B. Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
C. Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
D. Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

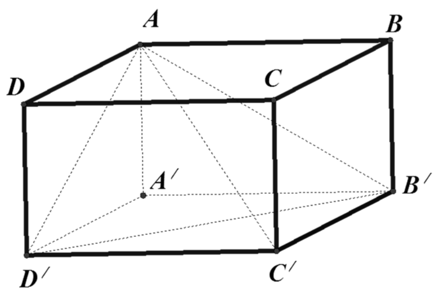
Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B
A sai vì đáy có thể là hình bình hành.
B đúng
C sai vì đáy có thể là hình bình hành
D sai vì đáy có thể là hình bình hành.

Câu 29: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AB'C'D'$ đều.
A. Hình lập phương. **B.** Hình hộp chữ nhật.
C. Hình hộp thoi. **D.** Đáp số khác.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A



Câu 30: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây?

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
B. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.
C. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.
D. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C

Câu 31: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AA'B'D'$ có các cạnh đối vuông góc.

A. Hình lập phương. **B.** Hình hộp tam giác.
C. Hình hộp thoi. **D.** Hình hộp tứ giác.

Hướng dẫn giải:

Ta có $AA' \perp B'D', A'D' \perp AB', A'B' \perp AD'$ suy ra Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Câu 32: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) (hoặc $(Q) \equiv (R)$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D

Câu 33: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với đường cao SH. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi các cạnh bên bằng nhau
B. H là trung điểm của một cạnh đáy khi hình hộp đó có một mặt bên vuông góc với mặt đáy.
C. H trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.
D. H thuộc cạnh đáy thì hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với đáy

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A

Câu 34: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình lăng trụ tam giác có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
B. Hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.
C. Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.
D. Hình lăng trụ có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Hướng dẫn giải:

Giả sử lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên $(AA'B'B),(AA'C'C)$ là hình chữ nhật, khi đó ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AA' \perp AC \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC)$. Vậy là $ABC.A'B'C'$ lăng trụ đứng.

Theo định nghĩa hình chóp đều và hình lăng trụ đều ta có đáp án B, C đúng.

Đáp án D sai.

Câu 35: Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m. Gọi a,b,c,d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$. **B.** Nếu $c \perp m$ thì $c \perp (Q)$.

C. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$. **D.** Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$.

Hướng dẫn giải:

Áp dụng hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án A.

DẠNG 1: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai mặt phẳng H và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1. Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và Ox, Oy, Oz. Khi đó góc giữa hai đường thẳng A, B, C chính là góc giữa hai mặt phẳng $OA = OB + OC = 1$ và $OABC$.

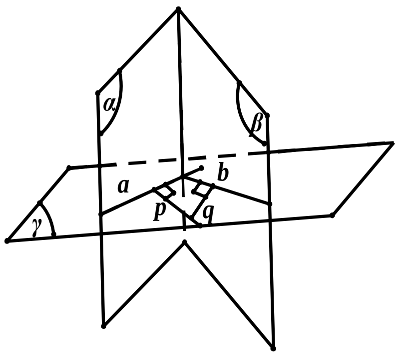
$\widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB}$.

Cách 2. Tìm hai vec tơ $ABC.A'B'C'$ có giá lần lượt vuông góc với $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}$ và M khi đó góc giữa hai mặt phẳng AB và (α) xác định bởi M.

Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu $B'C$, từ đó để tính $\cos\varphi$ thì ta cần tính a và b.

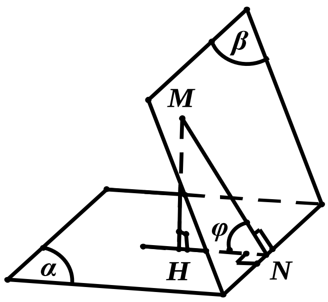
Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

a)



- Tìm giao tuyến M, N
- Chọn mặt phẳng AB, BC
- Tìm các giao tuyến (α)
- $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(a,b)}$

b)



- Tìm giao tuyến SB
- Lấy M, N, P .Dựng hình chiếu $AB, BC, C'D'$ của $ABCD.A'B'C'D'$ trên MN
- Dựng BD.

Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng AD' và vuông góc với giao tuyến MN tại một điểm trên giao tuyến.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

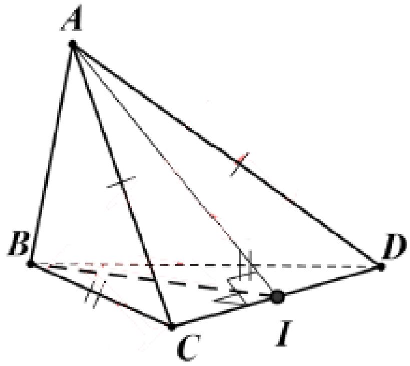
A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là $\widehat{CBD}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB}$.

C. $(BCD) \perp (AIB)$.

D. $(ACD) \perp (AIB)$.

Hướng dẫn giải:



Tam giác BCD cân tại B có I trung điểm đáy CD $\Rightarrow CD \perp BI$ (1)

Tam giác ACD cân tại A có I trung điểm đáy CD $\Rightarrow CD \perp AI$ (2)

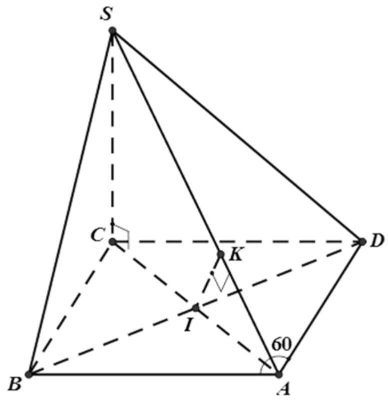
(1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABI)$. Vậy A: sai

Chọn A

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng A và góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SAC kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính số đo góc $\widehat{\text{BKD}}$.

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 30^0.

Hướng dẫn giải:



Ta có $CH = \dfrac{CS.CA}{\sqrt{CS^2 + CA^2}} = a; (CA = 2AI = a\sqrt{3})$;

$IK = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{1}{2}a = IB = ID$.

với H là hình chiếu của C lên SA, K là hình chiếu của I lên SA.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa (ABC) và (ABD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AB.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $CI \perp AB$ và $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$ và $DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, $((ABC),(ABD)) = (CI, DI) = \widehat{CID} = \alpha$.

Tam giác CID có $\cos\alpha = \dfrac{IC^2+ID^2-CD^2}{2.IC.ID} = \dfrac{\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \dfrac{1}{3}$. Chọn **A.**

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn C.

Giả sử gọi hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là $S.ABCD$ có đường cao SH.

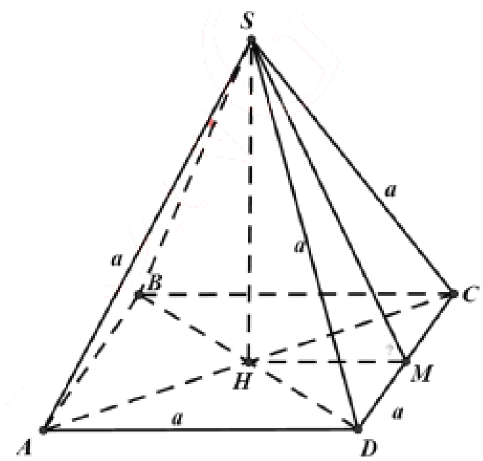
Ta có: $(SCD)\cap(ABCD)=CD$. Gọi M là trung điểm CD.

Dễ chứng minh được $SM\perp CD$ và $HM\perp CD$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SM,HM) = \widehat{SMH} = \alpha$.

Từ giả thiết suy ra ΔSCD là tam giác đều cạnh a có SM là đường trung tuyến $\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH $(H\in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $SC\perp(ABC)$. **B.** $O\in SH$.

C. $(SAH)\perp(SBC)$. **D.** $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SBA}$.

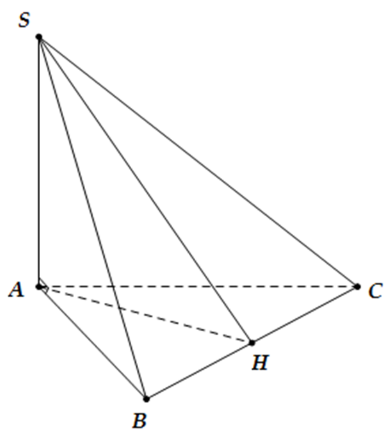
Hướng dẫn giải:

Ta có $\left.\begin{matrix}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.

$\left.\begin{matrix}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp SH$.

Mặt khác, $AH\perp BC$ nên $((SBC),(ABC)) = (SH,AH) = \widehat{SHA}$.

Chọn **D.**



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD}=60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm BC và F là trung điểm BE. Góc giữa hai mặt phẳng (SOF) và (SBC) là

A. 90^o. **B.** 60^o. **C.** 30^o. **D.** 45^o.

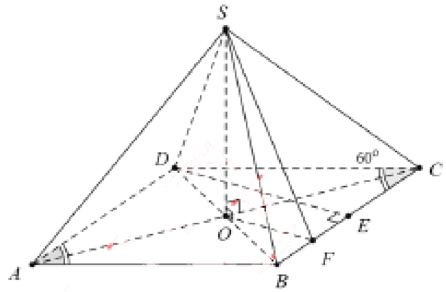
Hướng dẫn giải:

• ΔBCD đều nên $DE\perp BC$. Mặt khác $OF//DE\Rightarrow BC\perp OF$ (1).

• Do $SO\perp(ABCD)\Rightarrow BC\perp SO$ (2).

• Từ (1) và (2), suy ra $BC\perp(SOF)\Rightarrow(SBC)\perp(SOF)$.

Vậy, góc giữa (SOF) và (SBC) bằng 90^o.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $SA=SB=SC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Hướng dẫn giải:

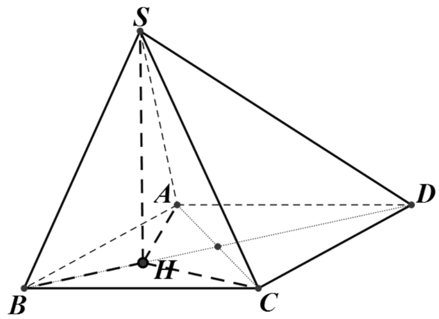
Gọi H là chân đường vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ $(SH\perp(ABCD))$

$SA=SB=SC=a$ $\Rightarrow$ các hình chiếu: $HA=HB=HC$ $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn (ABC)

Mà tam giác ABC cân tại B (vì $BA=BC=a$) $\Rightarrow$ tâm H phải nằm trên BD $\Rightarrow SH\subset(SBD)$

Vậy có $\left.\begin{matrix}SH\perp(ABCD)\\ SH\subset(SBD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(SBD)\perp(ABCD)$ nên góc $[(SBD),(ABCD)]=90^o$.

Chọn B



Câu 8: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng:

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Hướng dẫn giải:

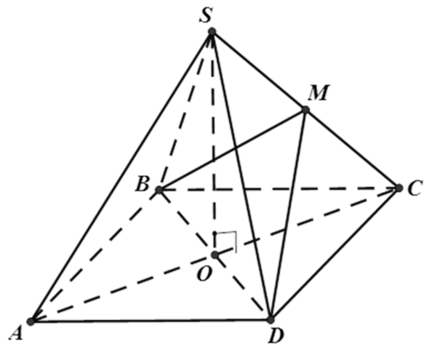
Gọi M' là trung điểm OC. Có

$S_{\Delta MBD}=\dfrac{1}{2}MO.BD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$;

$S_{\Delta BM'D}=\dfrac{1}{2}M'O.BD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^2}{4}$. Do đó

$\cos\alpha=\dfrac{S_{\Delta BM'D}}{S_{\Delta BMD}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^0$

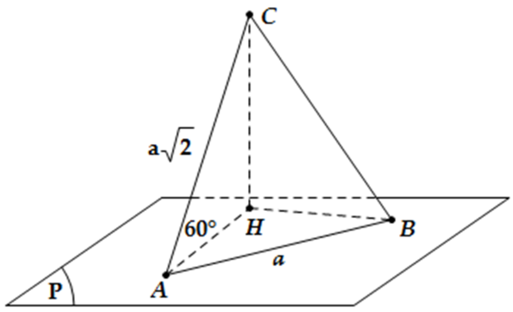
Vậy chọn đáp án C.



Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A. Cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P), cạnh $AC = a\sqrt{2}$, AC tạo với (P) một góc 60^0. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. (ABC) tạo với (P) góc 45^0.
B. BC tạo với (P) góc 30^0.
C. BC tạo với (P) góc 45^0.
D. BC tạo với (P) góc 60^0.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P).

Khi đó, $(AC,(P)) = (AC, AH) = \widehat{CAH} = 60^0$ và

$(BC,(P)) = (BC, AH) = \widehat{CBH} = \alpha$.

Tam giác AHC vuông tại H nên

$$\sin\widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC.\sin\widehat{CAH} = a\sqrt{2}.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$
.

Tam giác CHB vuông tại H nên

$$\sin\alpha = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

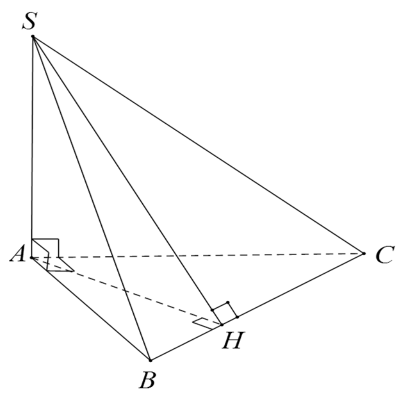
Chọn **C.**

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(SAB) \perp (ABC)$.
B. $(SAB) \perp (SAC)$.
C. Vẽ $AH \perp BC$, $H \in BC \Rightarrow$ góc AHS là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).
D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{SCB}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ nên đáp án **A** đúng.

$AB \perp AC, AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$. Nên đáp án B đúng

$AH \perp BC; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SHA}$.

Nên đáp án C đúng.

Ta có: $(SBC) \cap (SAC) = SC$ nên đáp án **D** sai.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

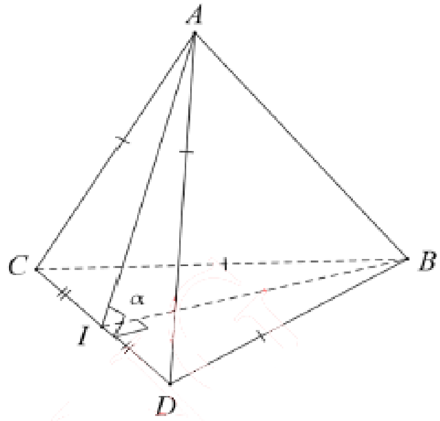
A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$.
B. $(BCD) \perp (AIB)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

D. $(ACD)\perp(AIB)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có: $\begin{cases}(ABC)\cap(ABD)=AB\\ BC\not\perp AB\\ BD\not\perp AB\end{cases}\Rightarrow \widehat{((ABD),(ABC))}\neq\widehat{CBD}$.

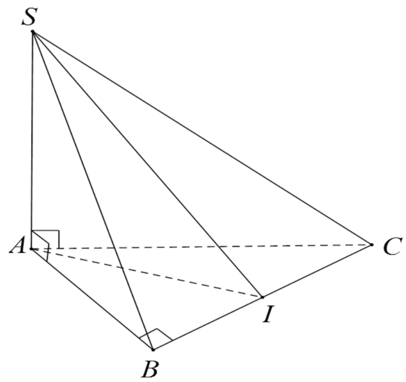
Nên đáp án **C** sai

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $AB\perp BC$, gọi I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. Góc SBA. **B.** Góc SCA. **C.** Góc SCB. **D.** Góc SIA.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có: $BC\perp SA, BC\perp AB\Rightarrow BC\perp SB$

$\Rightarrow\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ AB\perp BC, AB\subset(ABC)\\ SB\perp BC, SB\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{SBA}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

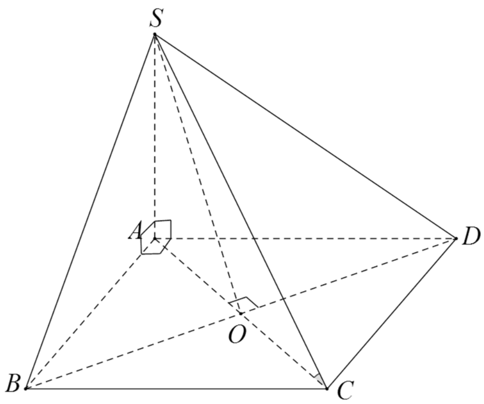
B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

D. $(SAC)\perp(SBD)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có: $\begin{cases}(SAD)\cap(ABCD)=AD\\ AB\perp AD, AB\subset(ABCD)\\ SA\perp AD, SA\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SAD),(ABCD))}=\widehat{SAB}$.

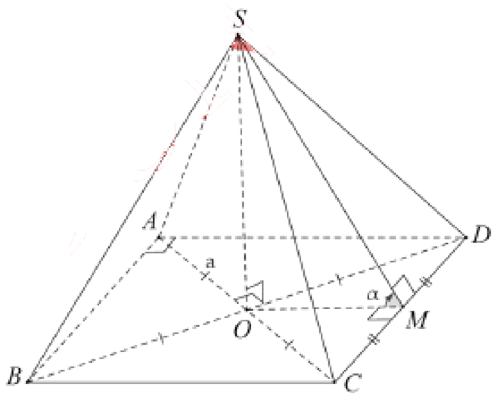
Nên đáp án **C** sai.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Biết $SO\perp(ABCD)$, $SO=a\sqrt{3}$ và đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên (SCD) với đáy. Khi đó $\tan\alpha=?$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của CD.

Khi đó $\begin{cases}CD\perp OM\\ CD\perp SO\end{cases}$

$\Rightarrow CD\perp SM\Rightarrow\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{SMO}=\alpha$.

Ta có: $R=OA=a\Rightarrow AC=2a\Rightarrow AB=AD=a\sqrt{2}$.

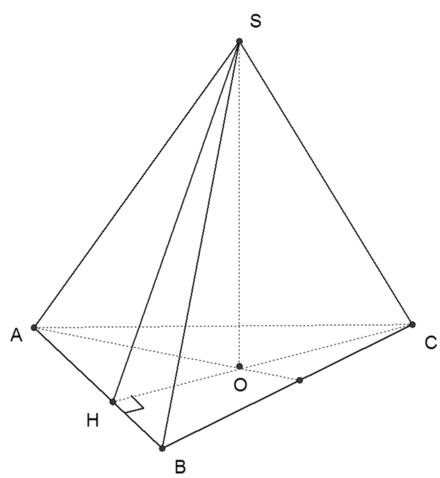
$\Rightarrow OM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{SO}{OM}=\sqrt{6}$.

Câu 15: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA=2AB$. Góc giữa (SAB) và (ABC) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha=60^0$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

C. $\cos\alpha=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải: **C**



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

Gọi $CO\cap AB=H$ suy ra H là trung điểm AB(vì ΔABC đều)

$\Rightarrow OH\perp AB$ và $OH=\dfrac{1}{3}CH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$

Tìm góc giữa (SAB) *và* (ABC)

$\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ OH\perp AB\\ SO\perp AB\quad (SO\perp(ABC))\end{cases}$

$\Rightarrow SH\perp AB$ (1)

Ta có

$\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ OH\perp AB,\ OH\subset(ABC)\\ SH\perp AB, SH\subset(SAB)\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAB);(ABC)}\right)=\left(\widehat{SH;OH}\right)=\widehat{SHO}=\alpha$

Từ (1) suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{(2AB)^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}AB$

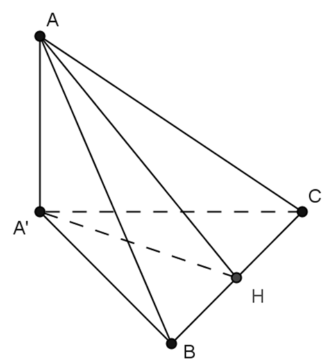
Từ đó ta có : $\cos\alpha=\frac{OH}{SH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}AB}{\frac{\sqrt{15}}{2}AB}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$

Chọn **B**

Câu 16: Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH=a\sqrt{3}$, $BC=3a$, BC chứa trong mặt phẳng (P). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P). Biết tam giác $A'BC$ vuông tại A'. Gọi φ là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\varphi=60^0$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\varphi=30^0$.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\begin{cases}BC\perp AA'\\ BC\perp AH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp A'H$.

Do đó:

$\begin{cases}(ABC)\cap(A'BC)=BC\\ BC\perp AH, BC\perp A'H\end{cases}\Rightarrow((ABC),(A'BC))=(AH,A'H)=\widehat{AHA'}$.

Mặt khác, tam giác $A'BC$ vuông tại A' nên $A'H=\frac{1}{2}BC=\frac{3a}{2}$.

Ta có $\cos\varphi=\frac{A'H}{AH}=\frac{\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

Chọn D.

Câu 17: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng :

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $S\in(SAB)\cap(SCD)$

Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$ với $d\in S; d\parallel AB\parallel CD$

Do đó: $d=(SAB)\cap(SCD)$

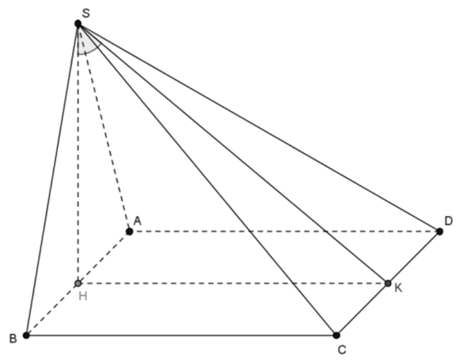
Mặt khác: $(SAB)\perp(ABCD)$; mà $HK\perp AB(hv)\Rightarrow HK\perp(SAB)$

Vì H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$ (vì $d \parallel AB$)

$\Rightarrow d \perp SK$ (theo định lí ba đường vuông góc)

Do đó: $\widehat{KSH} = \alpha$ là góc giữa (SAB) và (SCD)

Mà SH là đường cao trong ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Xét ΔSHK vuông tại H có: $\tan\alpha = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SAB) \perp (SAD)$. **B.** $(SAC) \perp (ABCD)$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{5}$. **D.** $\alpha = \widehat{SOA}$.

Hướng dẫn giải:

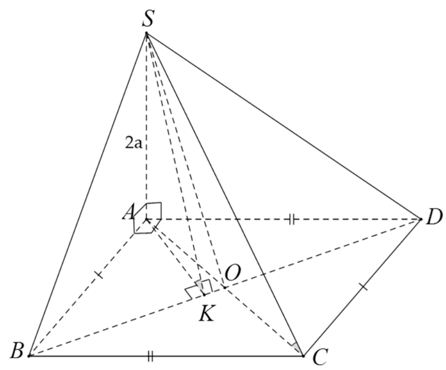
Chọn D.

Gọi AK là khoảng cách từ A đến BD

Khi đó $AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ và $BD \perp AK$, $BD \perp SA$

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \widehat{SKA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AK} = \sqrt{5}.$

Vậy đáp án **D** sai.



Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên vuông góc với đáy và $AA' = a$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

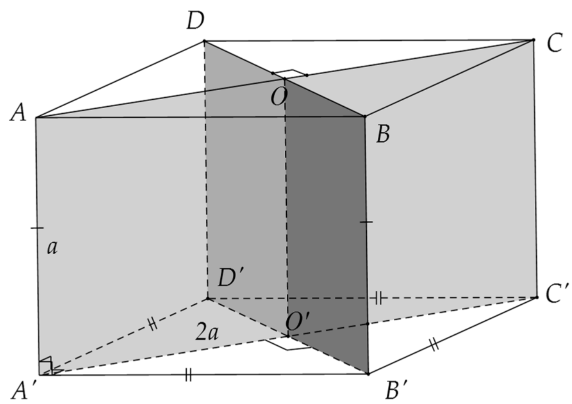
B. Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng $60°$.

C. Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.

D. Hai hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có: các cạnh bên vuông góc với đáy, đáy là hình thoi nên

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.

Hai hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau.

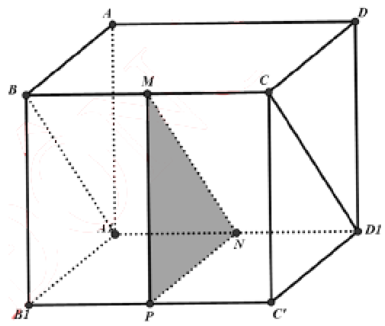
suy ra đáp án **A,C,D** đúng.

Mặt khác hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình thoi nên $(AA'C'C)\perp(BB'D'D)$. Suy ra đáp án **B** sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB) và $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 90^0$.

Hướng dẫn giải:



α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB) và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{MNP}$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{MP}{NP} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

Chọn đáp án **A.**

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA\perp(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

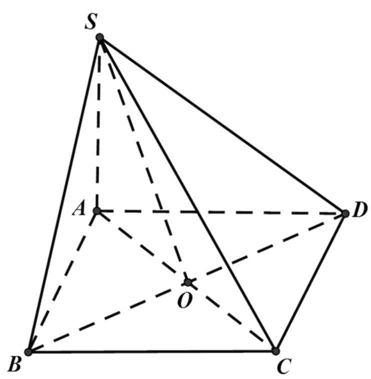
A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. $(SAC)\perp(SBD)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $(SBC)\cap(ABCD) = CD$

$\begin{cases} AB\perp BC, AB\subset(ABCD) \\ SB\perp BC, SB\subset(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{ABS}$. **Vậy A đúng**

Ta có: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA\end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$

Mà $BD\subset(SBD)\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$. **Vậy B đúng**

Ta có: $(SBD)\cap(ABCD) = BD$

$\begin{cases} AO\perp BD, AB\subset(ABCD) \\ SO\perp BD, SO\subset(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \widehat{SOA}$. **Vậy C đúng**

Ta có: $(SAD)\cap(ABCD) = BD$

$\begin{cases} AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAD);(ABCD)}\right) = \widehat{SAB} = 90^0$. **Vậy D sai.**

Câu 22: Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của AC khi đó $BH \perp AC; DH \perp AC$

Góc giữa hai mặt của tứ diện bằng $\widehat{BHD}$

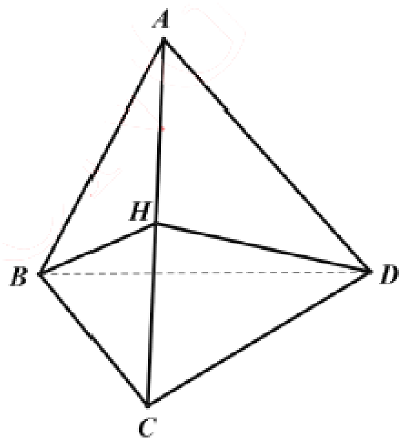
Ta có $BH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác BHD có :

$BD^2 = BH^2 + HD^2 - 2BH.HD.\cos\widehat{BHD}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2\frac{3a^2}{4}.\cos\widehat{BHD}$

$\Rightarrow \cos\widehat{BHD} = \frac{1}{3}$



Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = SB$. Góc giữa (SAB) và (SAD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

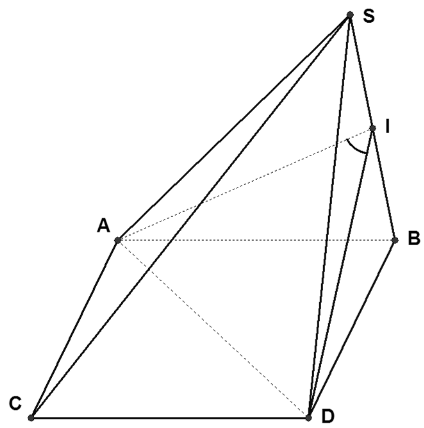
A. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi độ dài cạnh của hình chóp đều $S.ABCD$ là a. Gọi I là trung điểm của SB ta có $DI \perp SB$ (vì tam giác SBD đều) và $AI \perp SB$ (vì tam giác SAB đều). Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc $\widehat{AID}$.

Ta có : $AD = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông), $AI = DI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

Áp dụng định lý cosin cho góc I trong tam giác AID ta có :



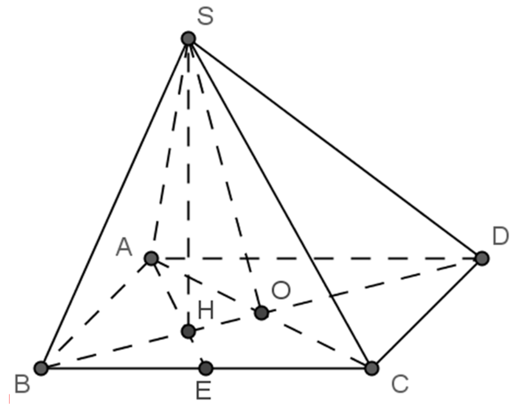
$$\cos(\widehat{AID}) = \frac{AI^2 + DI^2 - AD^2}{2AD.DI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$$

Vậy $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{ABC}=60^0$. Các cạnh SA,SB,SC đều bằng $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc của hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$. Giá trị $\tan\varphi$ bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:



Do $AB=BC$ và $\widehat{ABC}=60^0$ nên tam giác ABC đều.
Gọi H là hình chiếu của A lên $(ABCD)$.
Do $SA=SB=SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiế tam giác ABC.

Ta có : $\begin{cases}(SAC)\cap(ABCD)=AC\\ SO\perp AC, HO\perp AC\end{cases}$.

$\Rightarrow ((SAC),(ABCD))=(SO,HO)=\widehat{SOH}$

Mặt khác, $HO=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$,

$SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB=2a$, $AD=DC=a$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(SBC)\perp(SAC)$.

B. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB.

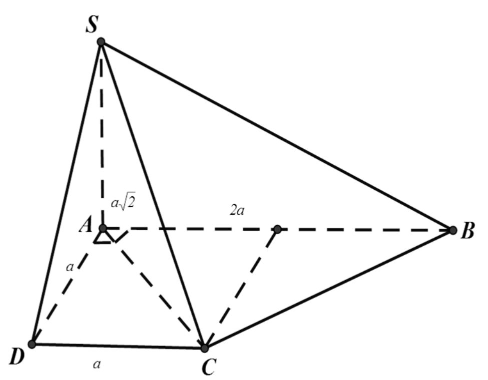
C. (SDC) tạo với (BCD) một góc 60^0.

D. (SBC) tạo với đáy một góc 45^0.

Hướng dẫn giải:

+Ta có: $\begin{cases}BC\perp SA\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$

Mà $BC\subset(SBC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$ **(A đúng)**



+ $\begin{cases}(SAD)\cap(SAB)=S\\ AB//CD\\ AB\subset(SAB)\\ CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow(SAD)\cap(SAB)=Sx//AB$

B đúng

$+(SCD)\cap(BCD)=CD$

Ta có: $\begin{cases}AD\perp CD, AD\subset(BCD)\\ SD\perp CD, SD\subset(SCD)\end{cases}$

Suy ra góc giữa (SDC) và (BCD) là $\widehat{SDA}$.

$\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}=\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{SDA}=54^0 44'$ **(C sai)**

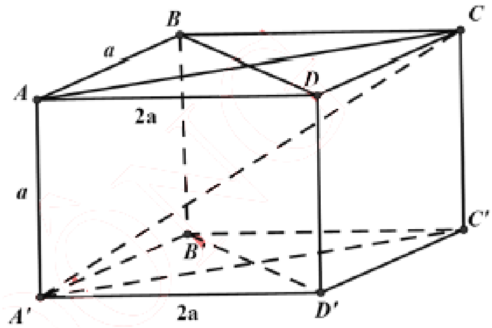
Vậy chọn C.

Câu 26: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=a$, $AD=2a$. Gọi α là góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy $ABCD$. Tính α.

A. $\alpha\approx 20°45'$. **B.** $\alpha\approx 24°5'$. **C.** $\alpha\approx 30°18'$. **D.** $\alpha\approx 25°48'$.

***Hướng dẫn giải:*.**

Chọn B.



Từ giả thiết ta suy ra: $AA'\perp(ABCD)\Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow(A'C,(ABCD))=(A'C,AC)=\widehat{A'CA}=\alpha$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ABC vuông tại B ta có:

$AC^2=AB^2+BC^2=a^2+4a^2=5a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{5}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $AA'C$ vuông tại A ta có:

$\tan\alpha=\dfrac{AA'}{AC}=\dfrac{a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\alpha\approx 24°5'$.

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

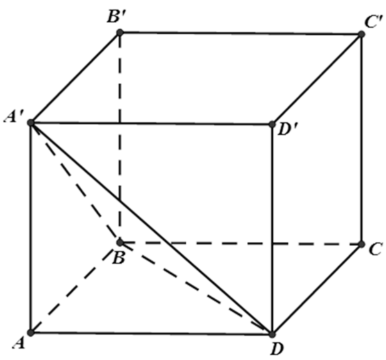
A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

D. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng nhau.

Hướng dẫn giải:



$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên hình chiếu của tam giác $A'BD$ lên các mặt chứa các cạnh của hình lập phương là các tam giác bằng nhau. Gọi S_1 là diện tích các tam giác này

Lại có $S_1=S_{AB'D}.cos\alpha$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

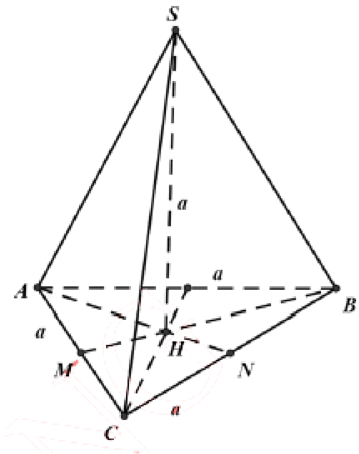
Hướng dẫn giải:.

Chọn C.

+ Vì $SH \perp (ABC)$ và $AN \subset (ABC) \Rightarrow SH \perp AN$ hay $\Rightarrow SH \perp AH$

$\Rightarrow$ AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) $\Rightarrow$

$(SA,(ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Vì ΔABC là tam giác đều cạnh a nên dễ tính được : $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ giả thiết suy ra H là trọng tậm ΔABC

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHA vuông tại H ta có:

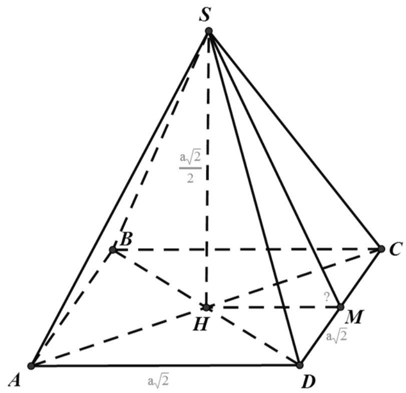
$\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^\circ$.

Câu 29: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.



Giả sử hình chóp đã cho là $S.ABCD$ có đường cao SH.

Ta có: $(ABCD) \cap (SCD) = CD$.

Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow$ dễ chứng minh được $SM \perp CD$ và $HM \perp CD$.

$\Rightarrow$ $((ABCD),(SCD)) = (HM, SM) = \widehat{SMH}$.

Mặt khác: $HM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHM vuông tại H, ta có :

$\tan \widehat{SMH} = \dfrac{SH}{HM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SMH} = 45^\circ$.

Câu 30: Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn D.

Giả sử tứ diện đều đã cho là $ABCD$ có cạnh a.

Ta có: $(ABC) \cap (BCD) = BC$.

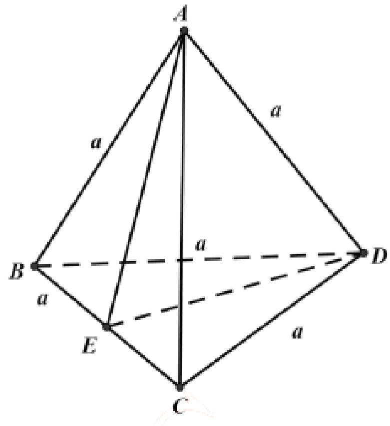
Gọi E là trung điểm BC. Khi đó dễ dàng chứng minh được $AE \perp BC$ và $DE \perp BC$.

$\Rightarrow ((ABC),(BCD)) = (AE, DE) = \widehat{AED}$.

Ta dễ tính được: $AE = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hệ quả của định lý cô sin trong tam giác AED ta có:

$$\cos\widehat{AED} = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2.AE.DE} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$



Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD). Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$. **C.** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $SB = SD = 2a$

Vì $\Delta SCD = \Delta SCB$ (c.c.c) nên chân đường cao hạ từ B và D đến SC của hai tam giác đó trùng nhau và độ dài đường cao bằng nhau $\Rightarrow BH = DH$

Do đó $\widehat{((SBC),(SCD))} = \widehat{DHB} = \varphi$

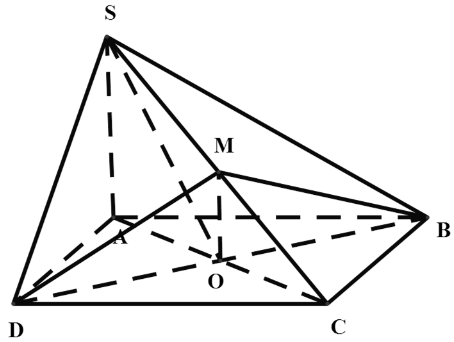
Ta có

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Lại có $BH = DH$ và O là trung điểm BD nên $HO \perp BD$ hay ΔHOB vuông tại O

$$OH = \sqrt{BH^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{10}a$$



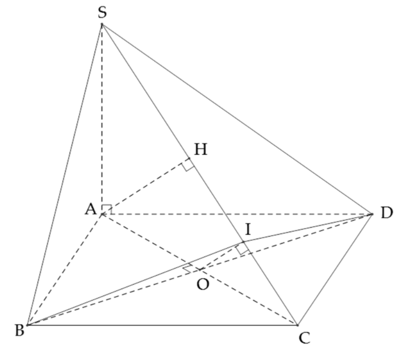
Ta có $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{4}; \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OB}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Chọn đáp án **C.**

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 90^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải:



Ta có: $SC \perp BD$ (vì $BD \perp AC, BD \perp SA$)
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OI \perp SC$ thì ta có $SC \perp (BID)$
Khi đó $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{BID}$

Trong tam giác SAC, kẻ đường cao AH thì $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

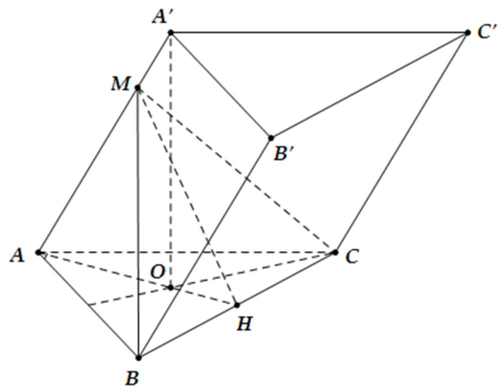
Mà O là trung điểm AC và $OI \parallel AH$ nên $OI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Tam giác IOD vuông tại O có $\tan\widehat{OID} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OID} = 60^0$
Vậy hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau một góc 60^0.

Câu 33: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \dfrac{3a}{4}$. Tang của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   **B.** 2.   **C.** $\dfrac{1}{2}$.   **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, $A'O \perp (ABC)$.
Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$. Vì tam giác ABC đều nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp A'O \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp MH$.

Do đó, $((MBC),(ABC)) = (MH, AH) = \widehat{MHA} = \alpha$.

Tam giác MAH vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn **D.**

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60^o.

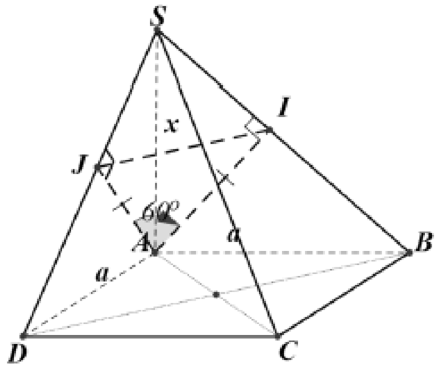
A. $x = \dfrac{3a}{2}$ **B.** $x = \dfrac{a}{2}$ **C.** $x = a$ **D.** $x = 2a$

Hướng dẫn giải:

* Trong (SAB) dựng $AI \perp SB$ ta chứng minh được $AI \perp (SBC)$ (1)
Trong (SAD) dựng $AJ \perp SD$ ta chứng minh được $AJ \perp (SCD)$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$góc $((SBC),(SCD)) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$
* Ta chứng minh được $AI = AJ$. Do đó, nếu góc $\widehat{IAJ} = 60^o$ thì ΔAIJ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$

ΔSAB vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI.SB = SA.AB \Rightarrow$

$AI = \dfrac{SA.AB}{SB}$ (3)



Và có $SA^2 = SI.SB \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SB}$ (4)

Ta chứng minh được $IJ // BD \Rightarrow \dfrac{IJ}{BD} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI.BD}{SB} \overset{(4)}{=}$

$\dfrac{SA^2.BD}{SB^2}$ (5)

Thế (3)&(5) vào $AI = IJ \Rightarrow AB = \dfrac{SA.BD}{SB} \Leftrightarrow AB.SB = SA.BD$

$\Leftrightarrow a.\sqrt{x^2 + a^2} = x.a\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a$

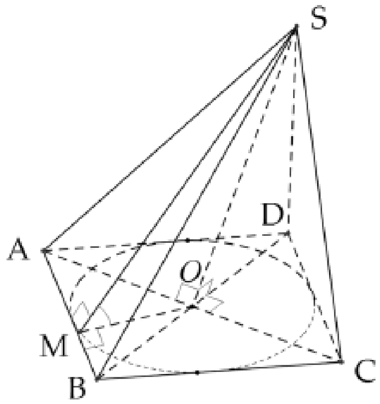
Chọn C

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SO \perp (ABCD), SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn nội tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Ta có $SO \perp (ABCD)$ và OM, ON, OP, OQ lần lượt vuông góc với AB, BC, CD, DA

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SM \perp AB, SN \perp BC, SP \perp CD, SQ \perp DA$

Từ đó suy ra $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$

Xét tam giác SMO vuông tại O ta có

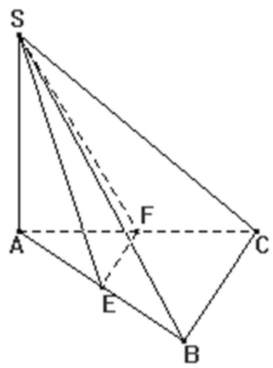
$\tan \widehat{SMO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^0$

Vậy mỗi mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau và bằng 60^0

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là :

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $(SEF) \cap (SBC) = Sx // EF // BC$

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SE, BC \perp SB$

$\Rightarrow SB \perp Sx, SE \perp Sx$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là : $\widehat{BSE}$

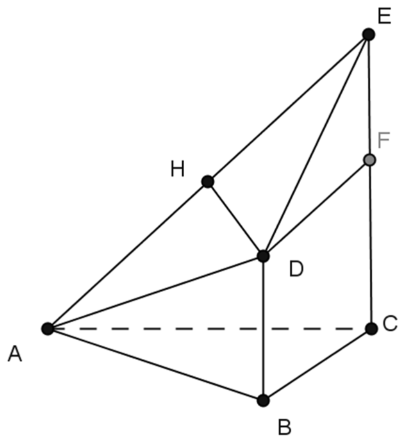
Chọn C.

Câu 37: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và nằm trong mặt

phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) tại B,C lần lượt lấy D,E nằm trên cùng một phía đối với (P) sao cho $BD=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}, CE=a\sqrt{3}$. Góc giữa (P) và (ADE) bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

Hướng dẫn giải:



Gọi $\varphi=((ABC),(ADE))$.

Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác, ta có: $AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$,

$AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

Gọi F là trung điểm EC, ta có $DF=BC=a$.

Do đó $DE=\sqrt{DF^2+FE^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra tam giác ADE cân tại D.

Gọi H là trung điểm AE, ta có $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{\dfrac{7a^2}{4}-a^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ADE}=\dfrac{1}{2}DH.AE=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\cos\varphi=\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^o$.

Chọn B.

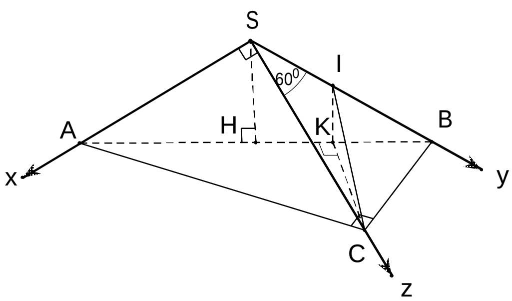
Câu 38: Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy}=120^0$, $\widehat{ySz}=60^0$, $\widehat{zSx}=90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A,B,C sao cho $SA=SB=SC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng :

A. 15^0 **B.** 90^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Áp dụng định lí Côsin trong tam giác SAB, ta có $AB=a\sqrt{3}$



Tam giác SAC vuông cân tại S nên $AC=a\sqrt{2}$; tam giác SBC đều nên $BC=a$.

Vì $AC^2+BC^2=AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C

Gọi H là trung điểm AB thì ta có

$\begin{cases}HA=HB=HC\\SA=SB=SC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$

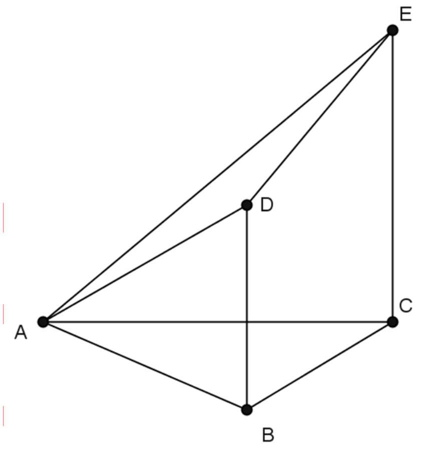
Mà $SH\subset(SAB)$ nên $(SAB)\perp(ABC)$

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=90^0$

Câu 39: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi d_B, d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B,C và vuông góc với (ABC). (P) là mặt phẳng qua A và hợp với (ABC) góc 60^0. (P) cắt d_B, d_C lần lượt tại D và E. biết $AD = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}, AE = a\sqrt{3}$. đặt $\widehat{DAE} = \varphi$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **D.** $\varphi = 30^0$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $S_{ABC} = S_{ADE}.\cos\alpha$ với $\alpha = \left((ABC),(ADE)\right) = 60^0$.

Do đó $S_{ADE} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\cos 60^0} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác,

$S_{ADE} = \dfrac{1}{2}AD.AE.\sin\varphi \Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

.

Chọn A.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC, CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phương pháp:

*** Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng minh (P) ⊥ (Q), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà a ⊥ (Q).
- Chứng minh $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

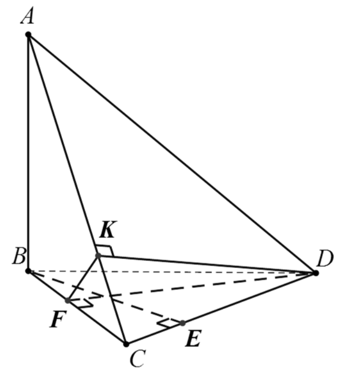
Để chứng minh d ⊥ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d ⊂ (Q) với (Q) ⊥ (P) và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).
- Chứng minh d = (Q) ∩ (R) với (Q) ⊥ (P) và (R) ⊥ (P).
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau ở O. Trong (ADC) vẽ $DK \perp AC$ tại K. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(ADC) \perp (ABE)$. **B.** $(ADC) \perp (DFK)$. **C.** $(ADC) \perp (ABC)$. **D.** $(BDC) \perp (ABE)$.

Hướng dẫn giải:



* Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

Vậy "$(ADC) \perp (ABE)$": ĐÚNG.

*

$$\left.\begin{matrix} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp (ABC) \\ SC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp AC \\ DK \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} AC \perp (DFK) \\ AC \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (DFK).$$

Vậy "$(ADC) \perp (DFK)$": ĐÚNG.

* Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (BDC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BDC) \perp (ABE)$.

Vậy "$(BDC) \perp (ABE)$": ĐÚNG.

* "$(ADC) \perp (ABC)$": SAI

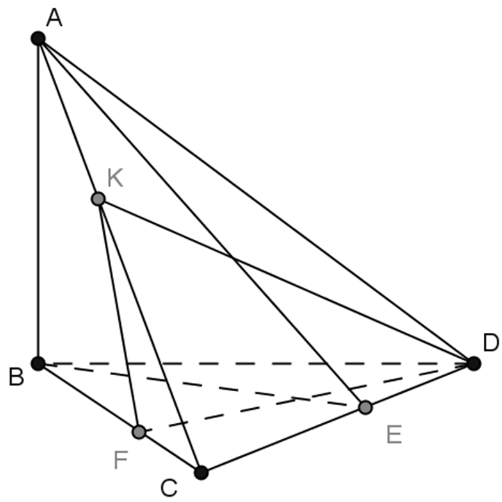
Chọn C

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE)\perp(ADC)$. **B.** $(ABD)\perp(ADC)$.

C. $(ABC)\perp(DFK)$. **D.** $(DFK)\perp(ADC)$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\begin{cases}(ABC)\perp(BCD)\\(ABD)\perp(BCD)\\(ABC)\cap(ABD)=AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(BCD)$.

Mặt khác: $\begin{cases}CD\perp BE\\CD\perp AB\end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABE)$ nên câu A đúng.

$\begin{cases}(ABC)\perp(BCD)\\(ABC)\cap(BCD)=BC\Rightarrow DF\perp(ABC)\\DF\perp BC\end{cases}$ nên câu C đúng.

Theo trên ta có $DF\perp(ABC)$ nên $DF\perp AC$.

Vậy ta có $\begin{cases}AC\perp DF\\AC\perp DK\end{cases}\Rightarrow AC\perp(DKF)\Rightarrow(ACD)\perp(DKF)$. Do đó câu D đúng.

Chọn B.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **không** đúng?

A. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp.

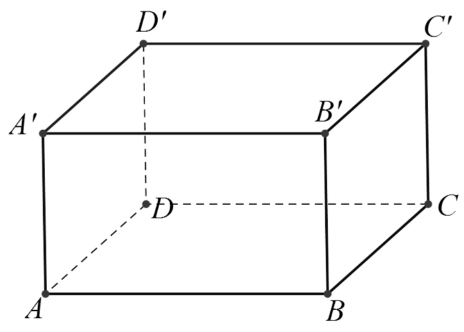
B. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Đáy là đa giác đều.

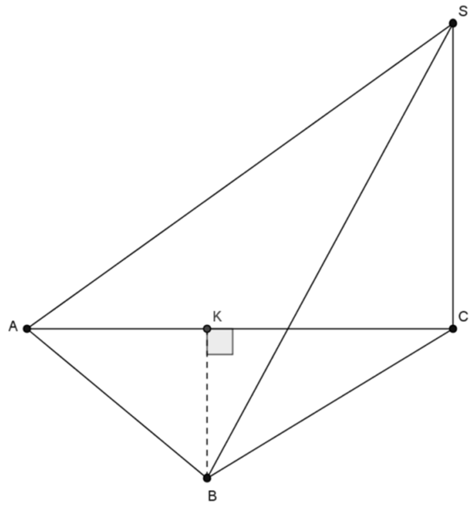
B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\SC=(SBC)\cap(SAC)\end{cases}\Rightarrow SC\perp(ABC)$. **Do đó câu** A **và** B **đúng**



C. **Sai.** vì nếu $A'\in SB$ thì hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) phải vuông góc với nhau theo giao tuyến SB

D. Ta có: $\begin{cases}SC\perp(ABC)\\SC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow(SAC)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AC

Mà BK là đường cao của ΔABC $\Rightarrow BK\perp AC\Rightarrow BK\perp(SAC)$. **Vậy** D. **đúng**

Vậy chọn đáp án D**.**

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không** đúng?

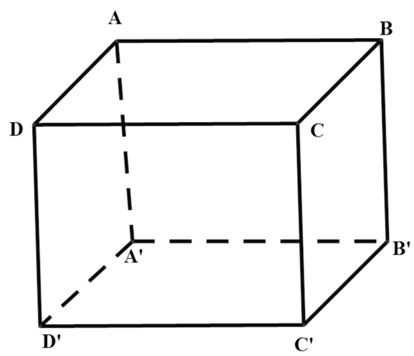
A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **B.** $(AA'H)\perp(A'B'C')$.

C. $(BB'C'C)\perp(AA'H)$. **D.** $(AA'B'B)\perp(BB'C'C)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $BC\perp(A'AH)$ nên $BC\perp BB'$, nếu $(AA'B'B)\perp(BB'C'C)$ thì $BC\perp AB$ vô lý vì H trùng A.

Chọn D.



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $H\in SB$. **B.** H trùng với trọng tâm tam giác SBC.

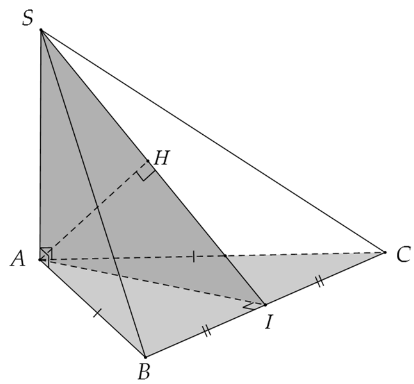
C. $H\in SC$. **D.** $H\in SI$ (I là trung điểm của BC).

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow AI\perp BC$ mà $BC\perp SA$ $\Rightarrow BC\perp(SAI)$.

Khi đó H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Suy ra $H\in SI$.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SC \perp (ABC)$.

B. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $A' \in SB$.

C. $(SAC) \perp (ABC)$.

D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK \perp (SAC)$.

Hướng dẫn giải:

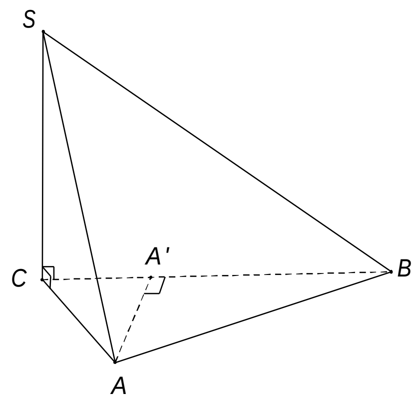
Chọn B.

Ta có: $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\ (SAC)\perp(ABC)\\ (SBC)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SC\perp(ABC)$.

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC),

khi đó $AA' \perp (SBC) \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow A' \in BC$.

Suy ra đáp án **B** sai



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH, $(H \in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $SC \perp (ABC)$.

B. $(SAH) \perp (SBC)$.

C. $O \in SC$.

D. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

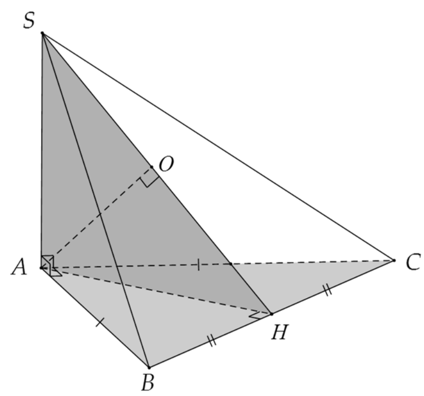
Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\ (SAC)\perp(ABC)\\ (SAB)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$

mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

Khi đó O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC)

Thì suy ra $O \in SI$ và $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SHA}$.



Vậy đáp án **B** đúng.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A. H là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.

B. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC.

C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.

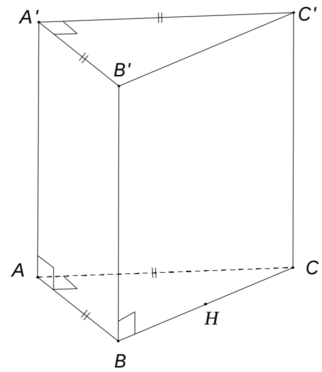
D. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Vì ABC là tam giác vuông cân ở A $\Rightarrow AB = AC \neq BC$ nên các mặt bên của lăng trụ không bằng nhau.

Vậy đáp án A sai.



Câu 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây không đúng?

A. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

B. Hai mặt $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc nhau.

C. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp.

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

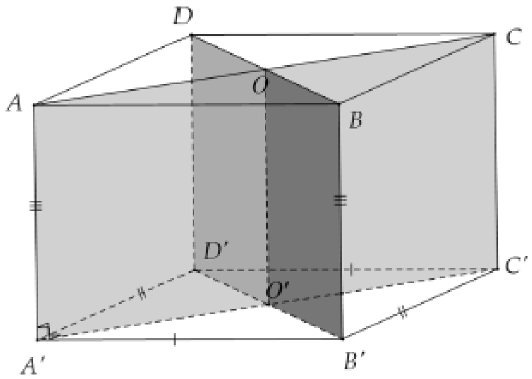
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên AC không vuông góc với BD

Suy ra hai mặt $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ không vuông góc với nhau.

Vậy đáp án B sai.



Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Mặt phẳng (A_1BD) không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (AB_1D). **B.** (ACC_1A_1). **C.** (ABD_1). **D.** (A_1BC_1).

Hướng dẫn giải:

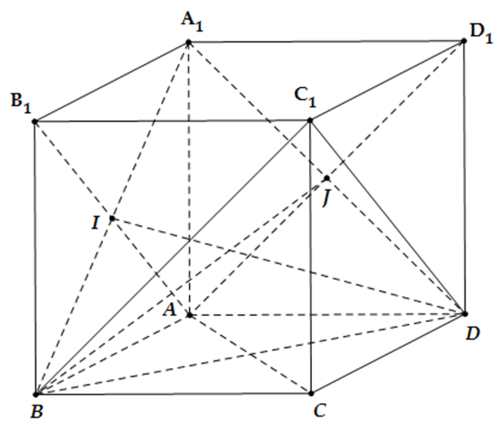
* Gọi $I = AB_1 \cap A_1B$.

Tam giác A_1BD đều có DI là đường trung tuyến nên $DI \perp A_1B$.

$DA \perp (AA_1B_1B) \Rightarrow DA \perp A_1B$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1B \perp DI \\ A_1B \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1D)$$ nên A đúng.

* Ta có



$\left.\begin{matrix} BD\perp AC \\ BD\perp AA_1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp\left(ACC_1A_1\right)\Rightarrow\left(A_1BD\right)\perp\left(ACC_1A_1\right)$ nên B đúng.

* Gọi $J=AD_1\cap A_1D$.

Tam giác A_1BD đều có BJ là đường trung tuyến nên $BJ\perp A_1D$.

$BA\perp\left(AA_1D_1D\right)\Rightarrow BA\perp A_1D$.

$\left.\begin{matrix} A_1D\perp BJ \\ A_1D\perp BA \end{matrix}\right\}\Rightarrow A_1B\perp\left(ABD_1\right)$ nên C đúng. Chọn **D.**

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.

B. Nếu α là góc giữa AC' và $\left(ABCD\right)$ thì $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

C. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$.

D. Hai mặt $\left(AA'C'C\right)$ và $\left(BB'D'D\right)$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:.

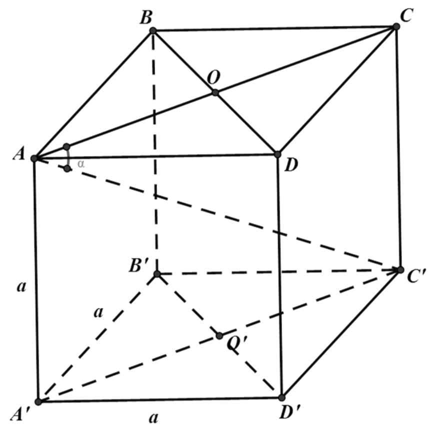
Chọn C.

+ ***Cách 1:*** Chứng minh trực tiếp chỉ ra C là đáp án sai.

Từ giả thiết dễ dàng tính được $AC=a\sqrt{2}$.

Mặt khác vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên suy ra $\widehat{AA'C'}=90°$.

Xét tứ giác $ACC'A'$ có $\begin{cases} AA'//CC' \\ AA'=CC'=a \\ \widehat{AA'C'}=90° \end{cases}\Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật có các cạnh a và $a\sqrt{2}$.



Diện tích hình chữ nhật $ACC'A'$ là : $S=a.a\sqrt{2}=a^2\sqrt{2}$ (đvdt)

$\Rightarrow$ **đáp án** C **sai.**

+ ***Cách 2:*** Chứng minh 3 đáp án A, B, D đều đúng và suy ra đáp án C sai.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau:

I) $SA=SB=SC$.

II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

III) Tam giác ABC là tam giác đều.

IV) H là trực tâm tam giác ABC.

Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều?

A. $\left(I\right)$ và $\left(II\right)$. **B.** $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$. **C.** $\left(III\right)$ và $\left(IV\right)$. **D.** $\left(IV\right)$ và $\left(I\right)$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn A.

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

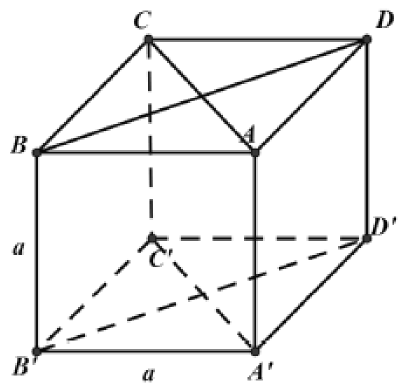
B. Bốn đường chéo AC', $A'C$, BD', $B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau.

D. $AC\perp BD'$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn C.



Vì theo giả thiết $ABCD.A'B'C'D'$ ta dễ dàng chỉ ra được:

+ $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases}$ và BD cắt BB' cùng nằm trong $(BB'D'D)$

$\Rightarrow AC \perp (BB'D'D)$. Mà $BD' \subset (BB'D'D) \Rightarrow AC \perp BD' \Rightarrow$ **đáp án** D **đúng**.

+ $\begin{cases} AC \subset (ACC'A') \\ AC \perp (BB'D'D) \end{cases} \Rightarrow (ACC'A') \perp (BB'D'D) \Rightarrow$ **đáp án** A **đúng**.

+ Áp dụng đình lý Pytago trong tam giác $B'A'D'$ vuông tại A' ta có:

$B'D'^2 = B'A'^2 + A'D'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác $BB'D'$ vuông tại B' ta có:

$BD'^2 = BB'^2 + B'D'^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BD' = a\sqrt{3}$. Hoàn toàn tương tự ta tính được độ dài các đường chéo còn lại của hình lập phương đều bằng nhau và bằng $a\sqrt{3} \Rightarrow$ **đáp án** B **đúng**.

+ Xét tứ giác $ACC'A'$ có $\begin{cases} AC // A'C' \\ AC = A'C' = a\sqrt{3} \\ AA' = CC' = a \\ \widehat{ACC'} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật. hoàn toàn tương tự ta cũng chỉ ra $BDD'B'$ cũng là hình chữ nhật có các cạnh là a và $a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau $\Rightarrow$ **đáp án** C **sai**.

Câu 15: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây không đúng?

A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.
B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$.
C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.

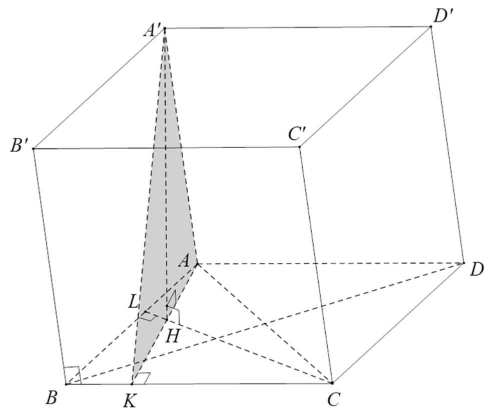
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC

$\Rightarrow H \in AK, BC \perp AK, BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H)$

$\Rightarrow \begin{cases} (AA'H) \perp (A'B'C') \\ (BB'C'C) \perp (AA'H) \\ BC \perp BB' \end{cases}$ nên đáp án B,C,D đúng.



Câu 16: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây?

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.
D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Theo lí thuyết lăng trụ tứ giác đều là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông.

Câu 17: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:

A. $3a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.

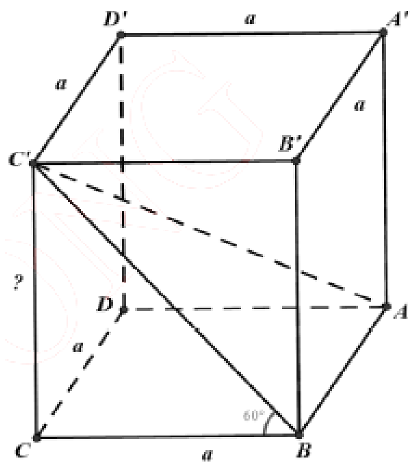
Ta có: $(ABCD)\cap(ABC')=AB$.

Từ giả thiết ta dễ dàng chứng minh được: $AB\perp(BB'C'C)$ mà $C'B\subset(BB'C'C)\Rightarrow AB\perp C'B$. Mặt khác: $CB\perp AB$.

$\Rightarrow((ABCD),(ABC'))=(CB,C'B)=\widehat{CBC'}=60°$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác BCC' vuông tại C ta có:

$\tan\widehat{CBC'}=\dfrac{CC'}{CB}\Rightarrow CC'=CB.\tan\widehat{CBC'}=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

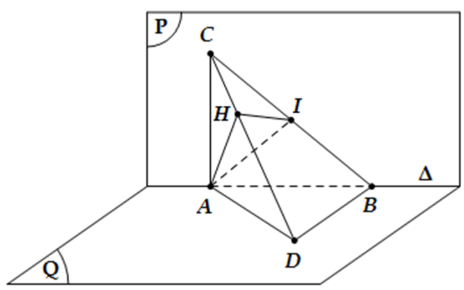


Câu 18: Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC\perp AB$, $BD\perp AB$ và $AB=AC=BD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là hình gì?

A. Tam giác cân. **B.** Hình vuông. **C.** Tam giác đều. **D.** Tam giác vuông.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI\perp BC$.



Ta có $\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\(Q)\supset BD\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp(P)\Rightarrow BD\perp AI$.

$\left.\begin{array}{l}AI\perp BC\\AI\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp CD$.

Trong (ACD), dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với CD cắt CD tại H.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác AHI.

Vì $AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp HI$ nên tam giác AHI là tam giác vuông tại I.

Chọn **D.**

Câu 19: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a;CD=2x$. với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$YCBT \Leftrightarrow \Delta CJD$ vuông cân tại J

$\Leftrightarrow IJ = IC = ID = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 4x^2 = 2AI^2 = 2(\frac{a^2 + a^2}{2} - x^2) \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

(Với I là trung điểm CD; J là trung điểm AB)

Vậy chọn đáp án A**.**

DẠNG 3: TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU, CHU VI VÀ DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Độ dài đường chéo AC' là

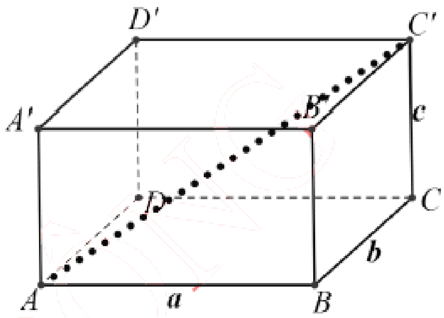
A. $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **B.** $AC' = \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

C. $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. **D.** $AC' = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

Hướng dẫn giải:

Từ sách giáo khoa, đường chéo hình hộp chữ nhật $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

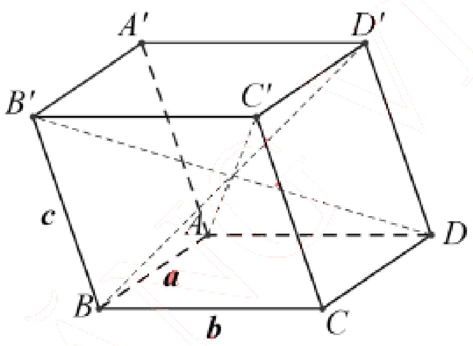
Chọn A

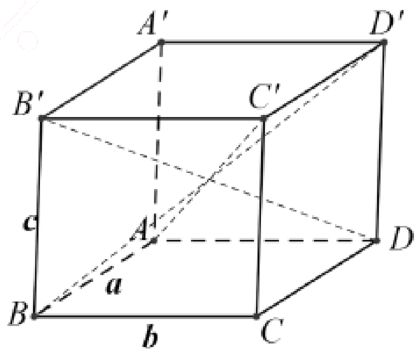


Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Nếu $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp là

A. Hình lập phương. **B.** Hình hộp chữ nhật **C.** Hình hộp thoi. **D.** Hình hộp đứng.

Hướng dẫn giải:





$AC' = BD'$ $\Rightarrow$hình bình hành $ABC'D'$ là hình chữ nhật

$BD' = B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $BDD'B'$ là hình chữ nhật

$AC' = B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật

Chọn B

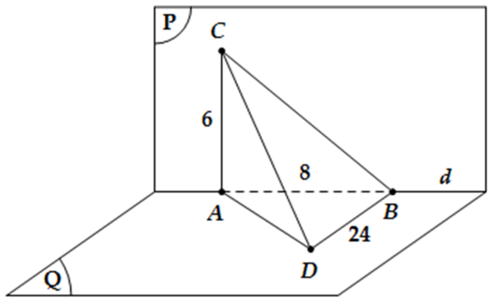
Câu 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến d của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho $AB = 8$. Gọi C là một điểm trên (P), D là một điểm trên (Q) sao cho AC, BD cùng vuông góc với giao tuyến d và $AC = 6$, $BD = 24$. Độ dài CD là:

A. 20. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 26.

Hướng dẫn giải:

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\(Q)\supset BD\perp d\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(P)\Rightarrow BD\perp BC$.



Tam giác BCD vuông tại B nên $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{24^2+10^2}=26$.

Chọn **D.**

Câu 4: Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC=a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $O.ABC$ là hình chóp đều.

B. Tam giác ABC có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. Tam giác ABC có chu vi $2p=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. Ba mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) vuông góc với nhau từng đôi một.

***Hướng dẫn giải:*.**

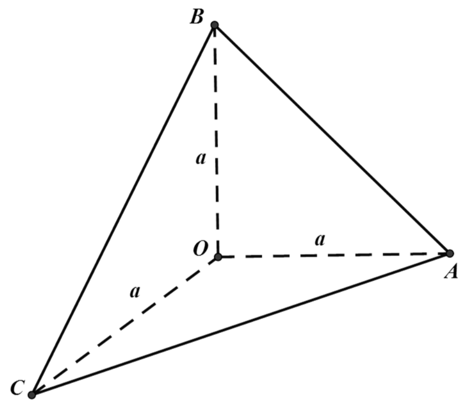
Chọn C.

+ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác OAB vuông tại O ta có:

$AB^2=OA^2+OB^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta tính được $BC=AC=a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều. Mặt khác theo giả thiết $OA=OB=OC=a \Rightarrow$ các mặt bên của hình chóp $O.ABC$ là các tam giác cân tại $O \Rightarrow O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow$ **đáp án A đúng.**



+ Chu vi ΔABC là:

$2p=AB+AC+BC=a\sqrt{2}+a\sqrt{2}+a\sqrt{2}=3a\sqrt{2} \Rightarrow$ **đáp án C sai.**

+ Nửa chu vi Diện tích ΔABC là: $p=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích ΔABC là:

$$S=\sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}-a\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}=\sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}.\frac{2a^3\sqrt{2}}{8}}=\sqrt{\frac{3a^4}{4}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ (đvdt).}$$

$\Rightarrow$ **đáp án B đúng.**

+ Dễ chứng minh được $\begin{cases}OA\perp(OBC)\\OA\subset(OAB)\\OA\subset(OAC)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(OAB)\perp(OBC)\\(OAC)\perp(OBC)\end{cases}, \begin{cases}OB\perp(OAC)\\OB\subset(OAB)\end{cases}\Rightarrow(OAB)\perp(OAC)$.

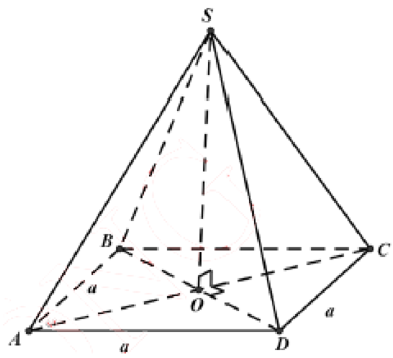
$\Rightarrow$ **đáp án D đúng.**

Câu 5: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A}=60^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S.ABCD$ là hình chóp đều.
B. Hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác cân.
C. $SO = \frac{3a}{2}$.
D. SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải:.

Chọn C.



Xét ΔABD có $\widehat{A} = 60°$, $AB = AD = a$ $\Rightarrow$ ΔABD là tam giác đều cạnh a. Vì O là tâm của $ABCD$ nên suy ra AO là đường trung tuyến trong ΔABD đều cạnh a nên dễ tính được $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$.

Mặt khác theo giả thiết SAC là tam giác đều

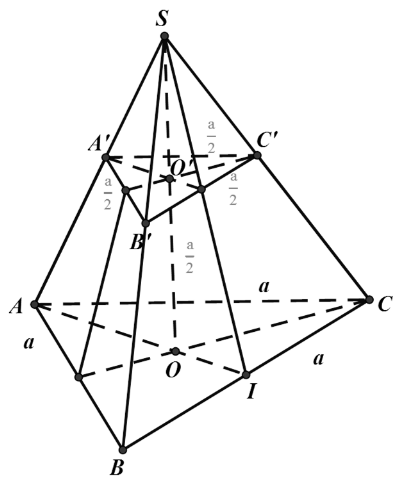
$\Rightarrow SA = SC = AC = a\sqrt{3}$ $\Rightarrow SO = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a. Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao $OO' = \frac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S.
B. $AA' = BB' = CC' = \frac{a}{2}$.
C. Góc giữa mặt bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC).
D. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.



+ **Đáp án A đúng.**

+ Gọi I là trung điểm của BC.

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\frac{AA'}{SA} = \frac{OO'}{SO} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow SO = 2OO' = a$.

Mặt khác ΔABC là tam giác đều cạnh a, có AI là đường trung tuyến $\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng định lý Pytago trong ΔSOA vuông tại O ta có:

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình chóp cụt đều nên

$AA' = BB' = CC' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ **đáp án B sai.**

+ Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$. Vì ΔSBC cân tại S và I là trung điểm của BC nên suy ra $SI \perp BC$. Mặt khác ΔABC là tam giác đều có I là trung điểm của BC $\Rightarrow AI \perp BC$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SI, AI) = (SI, OI) = \widehat{SIO}$ $\Rightarrow$ **đáp án C đúng.**

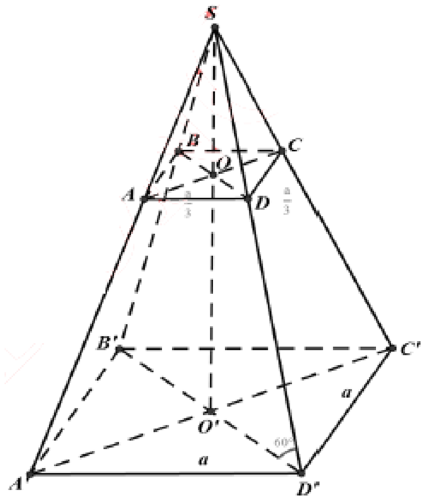
+ Ta có: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'.\sin A'}=\dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}=\dfrac{2A'B'.2A'C'}{A'B'.A'C'}=4\Rightarrow$ **đáp án** D **đúng.**

Câu 7: Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\dfrac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.

A. $OO'=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $OO'=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $OO'=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $OO'=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn A.



Ta có $SO'\perp(A'B'C'D')\supset B'D'\Rightarrow SO'\perp B'D'\Rightarrow O'D'$ là hình chiếu vuông góc của SD' lên $(A'B'C'D')$

$\Rightarrow(SD',(ABCD))=(SD',O'D')=\widehat{SD'O'}=60°$.

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\dfrac{AA'}{SA'}=\dfrac{OO'}{SO'}=\dfrac{1}{3}$.

Vì $\Delta A'D'C'$ là tam giác vuông cân tại D' có $D'O'$ là đường cao nên ta có:

$\dfrac{1}{D'O'^2}=\dfrac{1}{A'D'^2}+\dfrac{1}{D'C'^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2}{a^2}\Rightarrow D'O'^2=\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow D'O'=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta SD'O'$ vuông tại O' ta có:

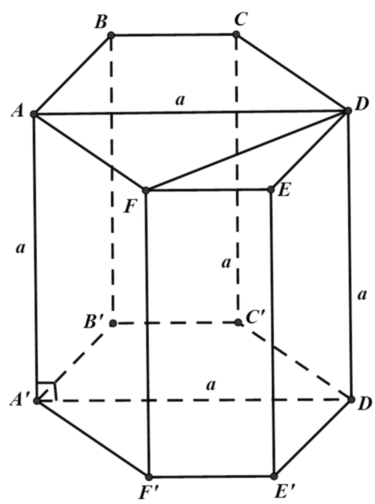
$\tan 60°=\dfrac{SO'}{O'D'}\Rightarrow SO'=O'D'.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow OO'=\dfrac{1}{3}SO'=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng:

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.



Tổng số đo các góc của hình lục giác là $4.180°=720°$. Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên mỗi góc của hình lục giác đều $ABCDEF$ là $120°\Rightarrow\widehat{FAB}=120°$. Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên ta suy ra:

+ AD là tia phân giác của góc $\widehat{FAB}$ và $\widehat{EDC}\Rightarrow\widehat{FAD}=\dfrac{\widehat{FAB}}{2}=60°$.

+ Tam giác AFD vuông tại F.

Xét tam giác AFD vuông tại F có $\widehat{FAD}=60°$ và $AD=a$ ta suy ra:

$\cos \widehat{FAD} = \dfrac{AF}{AD}$

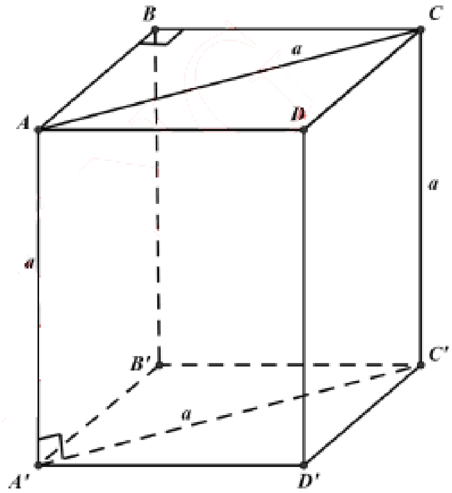
$\Rightarrow AF = AD.\cos \widehat{FAD} = a.\cos 60° = a.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2}.$

Câu 9: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $ACC'A'$ là hình vuông, cạnh bằng a. Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

***Hướng dẫn giải:*.**

Chọn A.



Từ giả thiết ta sauy ra ΔABC vuông cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45°$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABC vuông cân tại B có $\widehat{BAC} = 45°$ và cạnh $AC = a$, ta có:

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC.\cos \widehat{BAC} = a.\cos 45° = a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về $AA'G'G$?

A. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có hai kích thước là $2a$ và $3a$.

B. $AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.

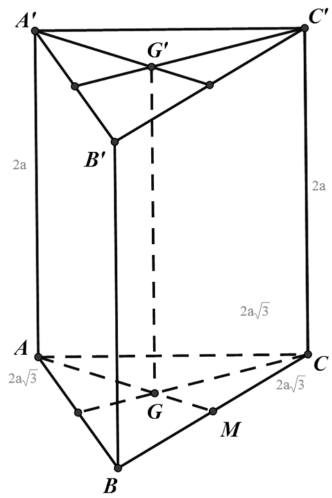
C. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$.

D. $AA'G'G$ là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$.

***Hướng dẫn giải:*.**

Chọn B.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó ta dễ dàng tính được :



$AM = 2a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.3a = 2a = AA'$.

$\Rightarrow AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.

Câu 11: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính AB theo a và x?

A. $AB = \sqrt{2(a^2 + x^2)}$. **B.** $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$.

C. $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$. **D.** $AB = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của CD. Vì tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B nên $AH \perp CD$, $BH \perp CD$.

Ta có

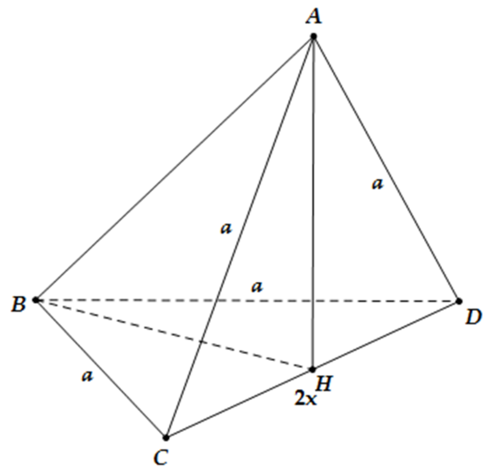
$$\left.\begin{array}{l}(ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ (ACD) \supset AH \perp CD\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BH.$$

$\Delta ACD = \Delta BCD (c.c.c) \Rightarrow AH = BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 -$

.

Tam giác AHB vuông tại H nên

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$. Chọn **C.**



Câu 12: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính IJ theo a và x?

A. $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$. **B.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + x^2)}}{2}$. **C.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$. **D.** $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

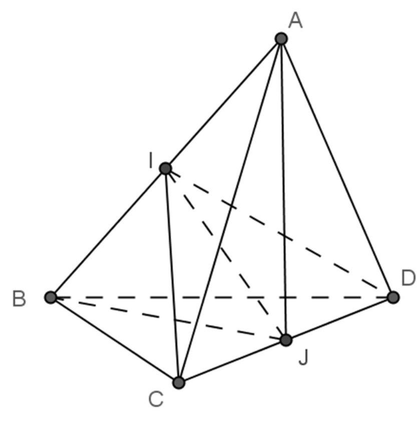
Ta có: $\begin{cases} CD \perp AJ \\ (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ$. Vậy

tam giác ABJ vuông tại J

Ta có: $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Do đó tam giác ABJ vuông cân tại J. Suy ra

$IJ = \dfrac{AJ\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$

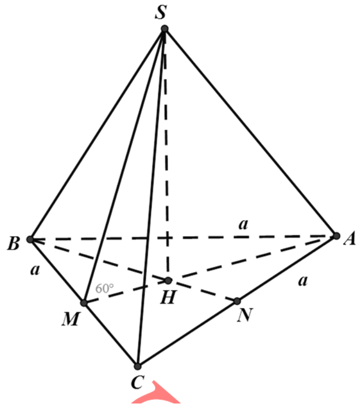


Chọn C.

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH = \dfrac{a}{2}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:.



Chọn A.

Ta có: $(SBC)\cap(ABC)=BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC.

Dễ chứng minh được $SM\perp BC$ và $AM\perp BC$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABC))=(SM,AM)=\widehat{SMA}=\widehat{SMH}=60°$.

Ta dễ tính được: $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì H là chân đường cao của hình chóp đều $S.ABC$ nên H trùng với trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow MH=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHM vuông tại H ta có :

$\tan\widehat{SMH}=\dfrac{SH}{MH}\Rightarrow SH=MH.\tan\widehat{SMH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\dfrac{3a}{6}=\dfrac{a}{2}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AA'=a$, $BC=2a$, $CA=a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

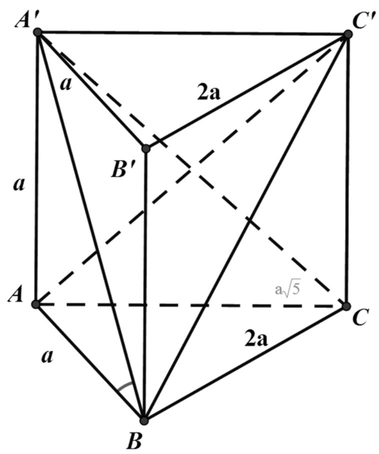
A. Đáy ABC là tam giác vuông.

B. Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc nhau.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng $45°$.

D. $AC'=2a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:.



Chọn D.

+ ***Cách 1:*** Chứng minh trực tiếp chỉ ra D là đáp án sai.

Từ giả thiết dễ dàng suy ra $CC'=AA'=a$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ACC' vuông tại C ta có:

$AC'^2=AC^2+CC'^2=5a^2+a^2=6a^2 \Rightarrow AC'=a\sqrt{6} \Rightarrow$ **đáp án** D **sai.**

+ ***Cách 2:*** Chứng minh 3 đáp án A, B, C đều đúng **suy ra đáp án** D **sai.**

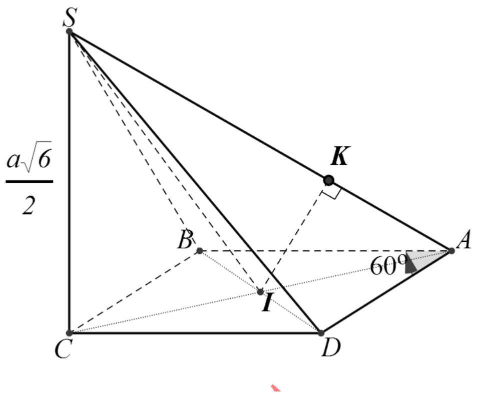
Câu 15: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng a và góc $\widehat{A}=60^0$, cạnh $SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SCA kẻ $IK\perp SA$ tại K. Tính độ dài IK được

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{a}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Tam giác AKI đồng dạng tam giác ACS $\Rightarrow \frac{IK}{SC} = \frac{AI}{SA} \Rightarrow$

$IK = \frac{SC.AI}{SA}$



ΔBCD và ΔABD đều cạnh a $\Rightarrow IA = IC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$AC = a\sqrt{3}$

ΔSAC vuông tại C $\Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} =$

$\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $IK = \frac{a}{2}$

Chọn A

Câu 16: Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ. Hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$. Tìm hệ thức liên hệ giữa diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác $A'B'C'$.

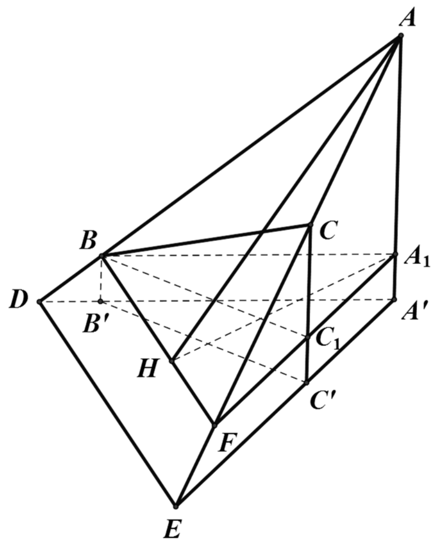
A. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cot\varphi.$ **B.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\sin\varphi.$

C. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\tan\varphi.$ **D.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi.$

Hướng dẫn giải:

Qua B kẻ mặt phẳng $(Q)//(P)$ cắt $AA';CC'$ lần lượt tại $A_1;C_1$

khi đó $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC_1}$



Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa mặt phẳng (ABC) và (BA_1C_1) và bằng φ

Kẻ $AH \perp BF \Rightarrow A_1H \perp BF$

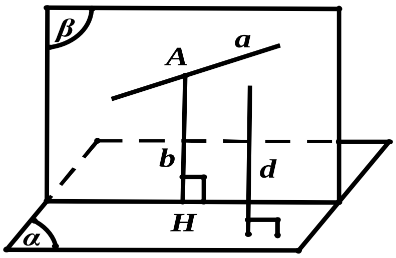
$$S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2}A_1H.BF$$
$$= \frac{1}{2}AH.\cos\varphi.BF$$
$$= S_{ABC}.\cos\varphi$$

Vậy $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi.$

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

Phương pháp:

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α).Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α)



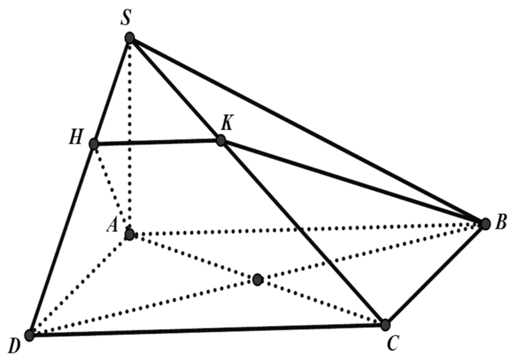
Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A \in a$
- Dựng đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α). Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD), (α) cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. hình bình hành. **B.** hình thang vuông.
C. hình thang không vuông. **D.** hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:



Dựng $AH \perp CD$

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Suy ra $CD \perp AH$

mà $AH \subset (SCD)$ suy ra $AH \subset (\alpha)$

Do đó $(\alpha) \equiv (AHB)$

Vì $(\alpha)//CD$ nên $(\alpha) \cap (SAD) = HK//CD (K \in SC)$.

Từ đó thiết diện là hình thang $ABKH$.

Mặt khác $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H .

Chọn đáp án B.

Ta có $AC = a\sqrt{2}, OC = \frac{a}{\sqrt{2}}, SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, mà $SO \perp OC \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}$. Chon A

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a,\ AD = 2a$. SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Hướng dẫn giải:

Gọi MN là đoạn thẳng qua O vuông góc AD (M, N thuộc AD, BC) ta có $MN \perp (SAD)$ nên SMN là thiết diện cần tìm.

$\Delta\ SMN$ vuông tại M nên $S_{SMN} = \dfrac{SM.MN}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

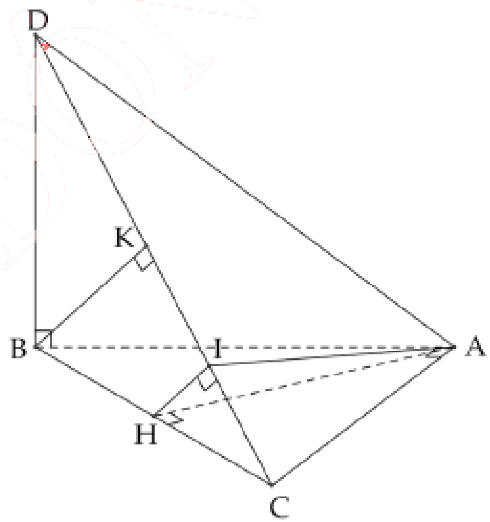
Chọn B.

Câu 3: Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD = a$. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có:

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=\Delta\\BD\subset(Q), BD\perp\Delta\end{cases} \Rightarrow BD\perp(P)$$

Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp BD\end{cases} \Rightarrow AH\perp CD$

Trong mặt phẳng (BCD), kẻ $HI \perp CD$ thì ta có $CD \perp (AHI)$

Khi đó mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tam giác AHI

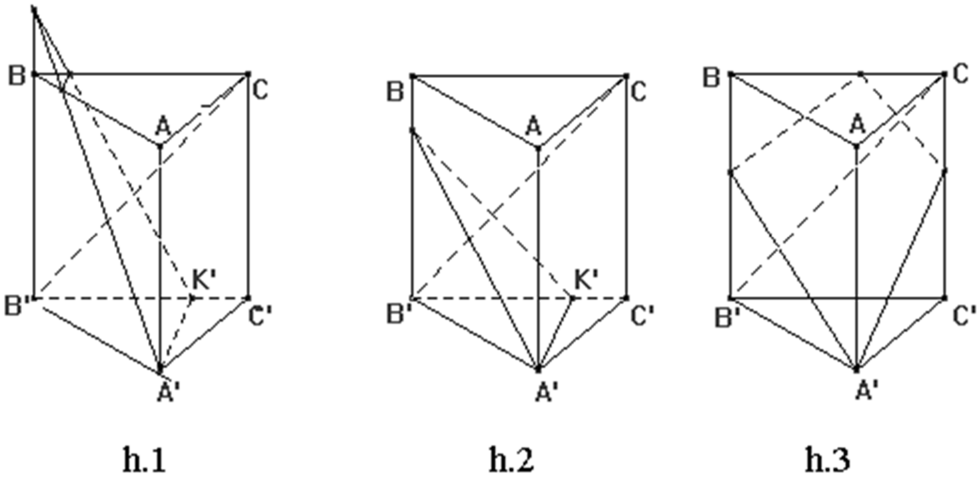
Mặt khác tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông BCD, kẻ đường cao BK thì $BK = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và $HI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Vậy: thiết diện cần tìm là tam giác AHI vuông tại H và có diện tích $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = c$, $AC = b$, cạnh bên $AA' = h$. Mặt phẳng (P) đi qua A' và vuông góc với $B'C$. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) có hình:



A. $h.1$ *và* $h.2$. **B.** $h.2$ *và* $h.3$. **C.** $h.2$. **D.** $h.1$.

Hướng dẫn giải:

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A' và vuông góc với BC. Từ A' ta dựng $A'K' \perp B'C'$, Vì $(ABC) \perp (BCC'B')$ nên $A'K' \perp B'C' \Rightarrow A'K' \perp (BCC'B') \Rightarrow A'K' \perp BC'$ (1).

Mặt khác trong mặt phẳng $(BCC'B')$ dựng $K'x \perp B'C$ và cắt $B'B$ tại 1 điểm N (2) (điểm gì đề chưa có cho nên cho tạm điểm N).

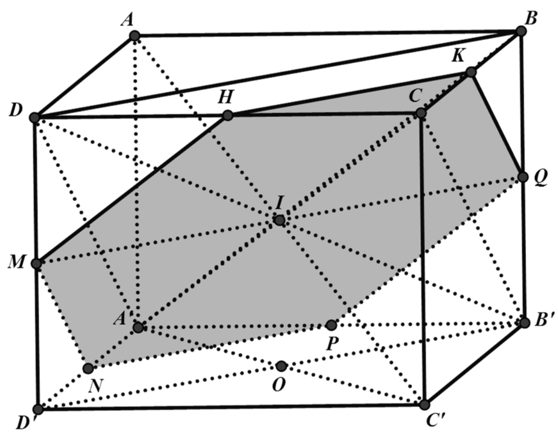
Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} BC' \perp A'K' \\ BC' \perp K'N \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'K'N)$

Chọn đáp án A

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Thiết diện là hình gì?

A. Hình vuông. **B.** Lục giác đều.
C. Ngũ giác đều. **D.** Tam giác đều.

Hướng dẫn giải:



Ta có AC là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$.

mà $AC \perp BD$ nên $AC' \perp BD$, (1)

Ta có $\left.\begin{matrix} AD \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B \perp AD$

Lại có $A'B \perp AB'$ suy ra

$\left.\begin{matrix} A'B \perp (AB'C'D) \\ AC' \subset (AB'C'D) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC' \perp A'B$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (A'BD)$, (3)

Mặt phẳng trung trực AC' là mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của AC' và $(\alpha) \perp AC'$, (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} mp(\alpha) \text{ qua } I \\ (\alpha) // (A'BD) \end{cases}$

Do đó

Qua I dựng $MQ // BD$

Dựng

$MN // A'D$

$NP // B'D' // BD$

$QK // B'C // A'D$

$KH // BD$

Mà $MN = NP = PQ = QK = KM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

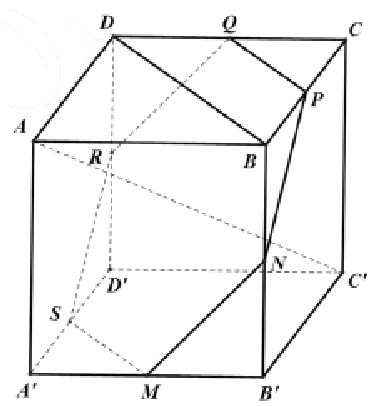
Suy ra thiết diện là lục giác đều.

Chọn đáp án B.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Diện tích thiết diện là

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = a^2$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:



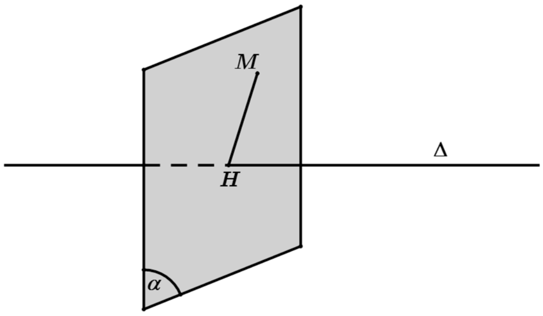
Ta có mặt phẳng trung trực của AC' cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là lục giác đều $MNPQRDS$ cạnh $\dfrac{1}{2}B'C = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $S = 6.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

KHOẢNG CÁCH

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.



Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp(M,\Delta)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

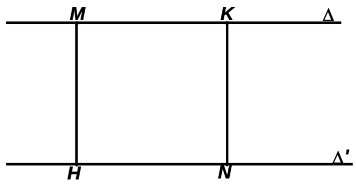
$d(M,\Delta)=MH$

Nhận xét: $OH \le OM, \forall M \in \Delta$

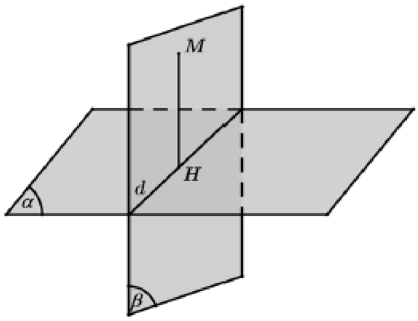
2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta')=0$.
- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=d(N,\Delta)$



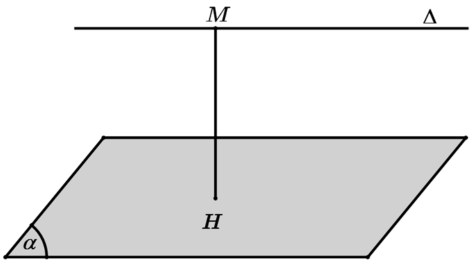
3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.



Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

$d(M,(\alpha))=MH$

4. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.

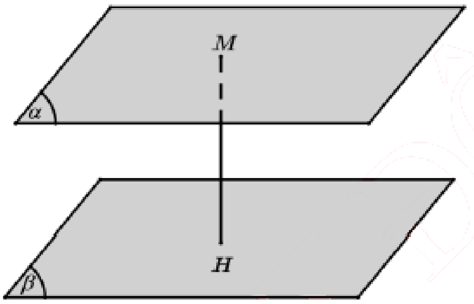


Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

$d\left(\Delta,(\alpha)\right)=d\left(M,(\alpha)\right), M\in\Delta$.

- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha))=0$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

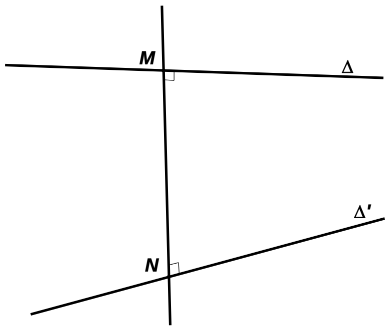


Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$d\left((\alpha),(\beta)\right)=d\left(M,(\beta)\right)=d\left(N,(\alpha)\right)\ , M\in(\alpha), N\in(\beta)$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a,b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



B – BÀI TẬP

Câu 1: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây?

A. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

B. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α)

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

• Đáp án A: Đúng
• Đáp án B: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.
• Đáp án C: Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.
• Đáp án D: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông góc.

Chọn đáp án D.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường thẳng vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kỳ thuộc a tới mp(P).

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kỳ trên b.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

DẠNG 1: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM M ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG Δ.

Phương pháp:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

- Trong $mp(M,\Delta)$ vẽ $MH \perp \Delta \Rightarrow d(M,\Delta) = MH$
- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H

$\Rightarrow d(M,\Delta) = MH$.

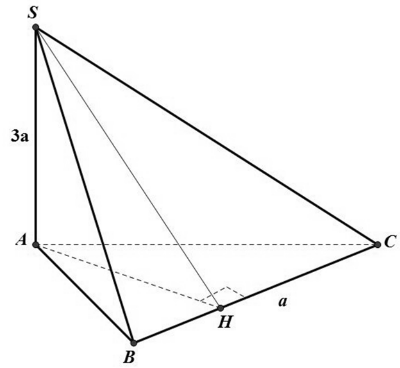
Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

- ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{MA^2} + \dfrac{1}{MB^2}$.
- MH là đường cao của ΔMAB thì $MH = \dfrac{2S_{MAB}}{AB}$.

Câu 1: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA vuông góc với (ABC) và $SA = 3a$. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2, BC = a$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ AH vuông góc với BC:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\rightarrow AH=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{4a^2}{a}=4a$

Khoảng cách từ S đến BC chính là SH

Dựa vào tam giác vuông ΔSAH ta có

$SH=\sqrt{SA^2+AH^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$

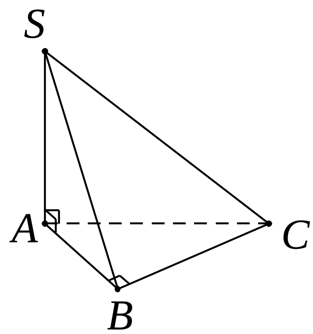
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA=AB=BC=1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. $\sqrt{2}$.   **B.** $\sqrt{3}$.   **C.** 2.   **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Do $\begin{cases}SA\perp AB\\SA\perp BC\end{cases}$ nên $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC$

Như vậy $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+(AB^2+BC^2)}=\sqrt{3}$



Chọn đáp án B.

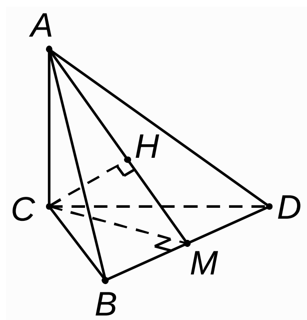
Câu 3: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC\perp(BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$.   **B.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$.   **C.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$.   **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Do ΔABC đều cạnh a nên đường cao $MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$d(C,AM)=CH=\frac{AC.MC}{\sqrt{AC^2+MC^2}}=a\frac{\sqrt{66}}{11}$



Chọn đáp án C.

Câu 4: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $a\sqrt{5}$.   **B.** $2a$.   **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.   **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

• Gọi M là trung điểm của BC ; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

• Ta có $BC\perp AM$ và $BC\perp SA$ nên

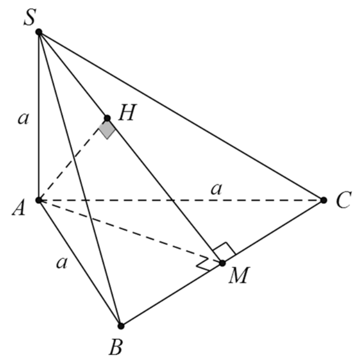
$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SM$, do đó $AH \perp (SBC)$.

Vậy $AH = d(A,(SBC))$.

• $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \frac{AS.AM}{\sqrt{AS^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án C.

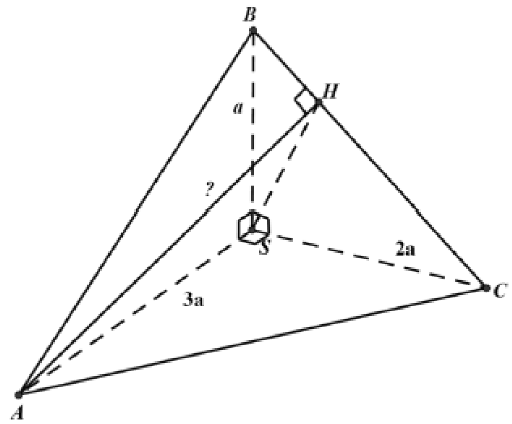


Câu 5: Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a$, $SB = a$, $SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.



+ Dựng $AH \perp BC \Rightarrow d(A, BC) = AH$.

+ $\begin{cases} AS \perp (SBC) \supset BC \Rightarrow AS \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases}$, AH cắt AS cùng nằm trong (SAH).

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \supset SH \Rightarrow BC \perp SH$.

Xét trong ΔSBC vuông tại S có SH là đường cao ta có:

$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{4a^2}{5}$

$\Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

+ Ta dễ chứng minh được $AS \perp (SBC) \supset SH \Rightarrow AS \perp SH \Rightarrow \Delta ASH$ vuông tại S.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔASH vuông tại S ta có:

$AH^2 = SA^2 + SH^2 = 9a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{49a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{7a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 6: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

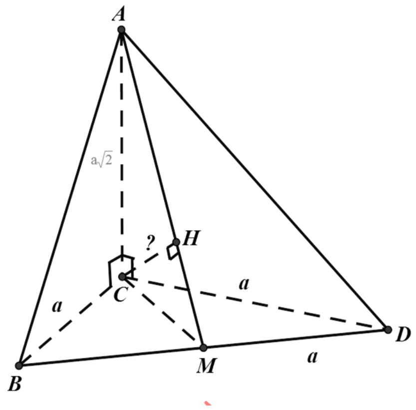
Dựng $CH \perp AM \Rightarrow d(C, AM) = CH$.

Vì ΔBCD là tam giác đều cạnh a và M là trung điểm của BD nên dễ tính được $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔACM vuông tại C có CH là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{CM^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\frac{11}{6a^2}\Rightarrow CH^2=\frac{6a^2}{11}$$

$$\Rightarrow CH=a\sqrt{\frac{6}{11}}.$$



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

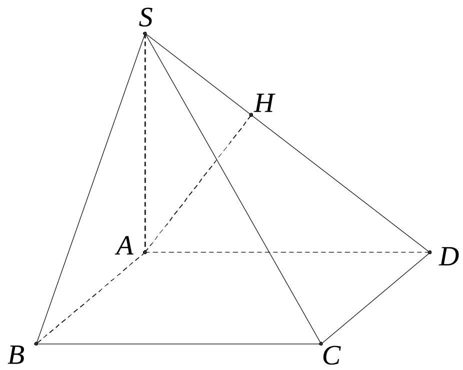
A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CD$; $AD\perp CD$.

Suy ra $(SAD)\perp CD$ Trong (SAD) kẻ AH vuông góc SD tại H. Khi đó $AH\perp(SCD)$

$$d\left(A,(SCD)\right)=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a.2a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}..$$



Chọn đáp án C.

Câu 8: Hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến (ABC) bằng :

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{5}$.

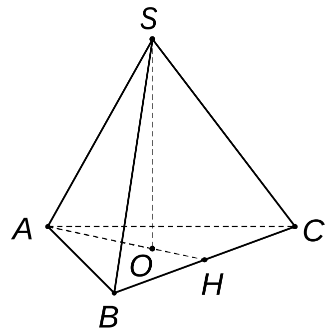
Hướng dẫn giải:

Gọi O là chân đường cao của hình chóp.

Ta có $AO=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}.3a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$$\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a$$

Chọn đáp án C.



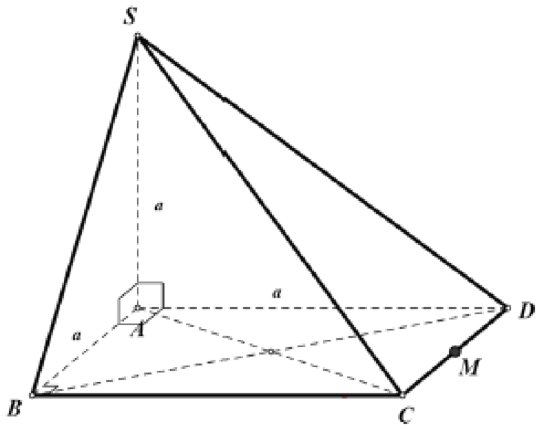
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

☑ Khoảng cách từ M đến (SAB): $d\left(M,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)=a$.

Chọn đáp án D.



Câu 10: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC\perp(BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

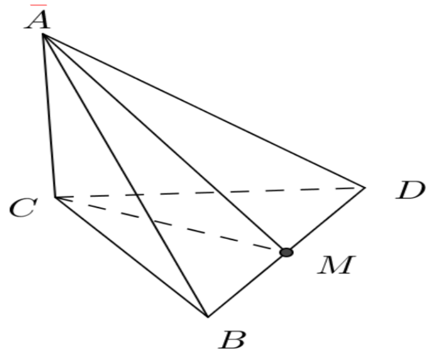
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD\\ CM\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp AM$ (Định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow d(A;BD)=AM$.

$CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác BCD đều).

Ta có: $AM=\sqrt{AC^2+MC^2}=\sqrt{2a^2+\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.



Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B}=60^\circ$. Biết $SA=2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

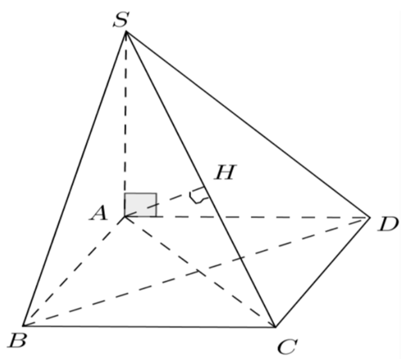
Kẻ $AH\perp SC$, khi đó $d(A;SC)=AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B}=60^\circ\Rightarrow\triangle ABC$ đều nên $AC=a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

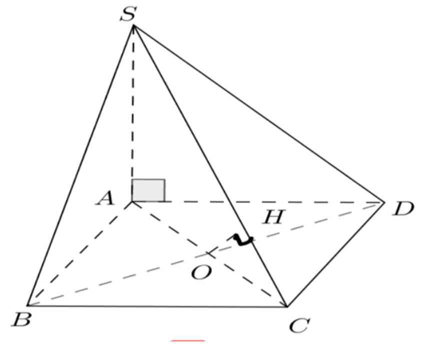
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Kẻ $OH \perp SC$, khi đó $d(O;SC) = OH$. Ta có: $\triangle SAC \sim \triangle OCH$ (g-g)

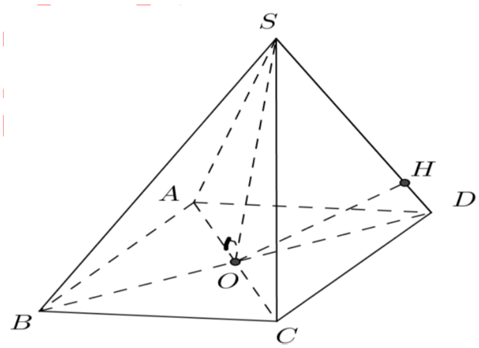
nên $\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{OC}{SC}.SA$.

Mà: $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

Vậy $OH = \frac{OC}{SC}.SA = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng

A. $a\sqrt{2}\cot\alpha$. **B.** $a\sqrt{2}\tan\alpha$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

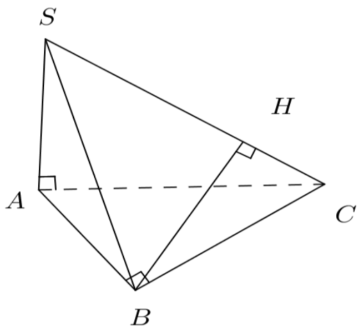
$SO \perp (ABCD)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH \perp SD$, khi đó $d(O;SD) = OH$, $\alpha = \widehat{SDO}$.

Ta có: $OH = OD\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d(B;SC) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB.BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a$.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ **B.** $a\sqrt{2}\tan$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ **D.** $a\sqrt{2}\cot\alpha$

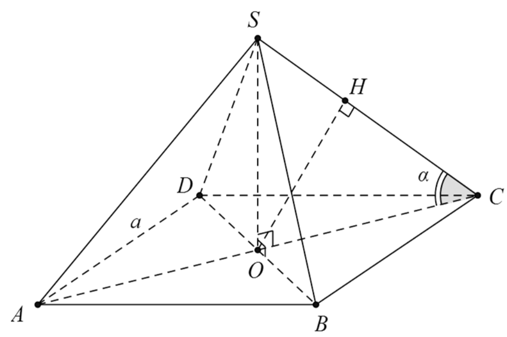
Hướng dẫn giải:

• $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

• Khoảng cách cần tìm là đoạn OH.

$OH = OC\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$

Chọn đáp án C.



Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{4}{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Nối CM . Kẻ $CH \perp AM$

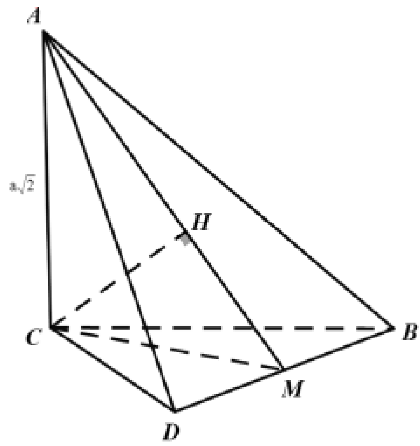
Suy ra $d(C;AM) = CH$

Xét ΔACM có

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CM^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2}$$

$\Rightarrow CH = a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$

Vậy $d(C;AM) = CH = a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$.



Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.

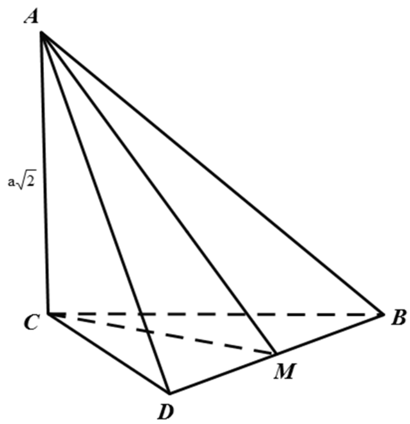
Ta có $d(A;BD) = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ $AC \perp (BCD) \Rightarrow AC \perp BD$

Lại có với M là trung điểm BD mà ΔBCD đều nên $CM \perp BD$

Từ đó ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ CM \perp BD \end{cases} \Rightarrow AM \perp BD$

Suy ra $d(\text{A};\text{BD}) = \text{AM}$

Xét tam giác vuông ACM , ta có



$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Vậy $d(A;BD) = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a,\ AB = a\sqrt{3},\ BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có

$\begin{cases} SA \perp AB \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$

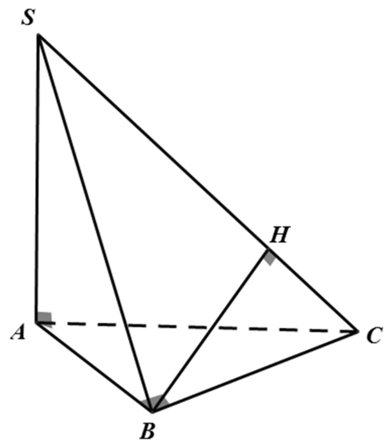
Suy ra ΔSBC vuông tại B

Kẻ $BH \perp SC$. Ta có $d(B;SC) = BH$

Lại có

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{SA^2 + AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow d(B;SC) = BH = 2a$.



Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng CD' bằng

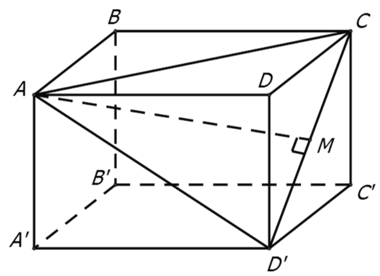
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của CD'. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác ACD' là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$.

$AM \perp CD' \Rightarrow d(A, CD') = AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Đáp án: **B.**



Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng DB' bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

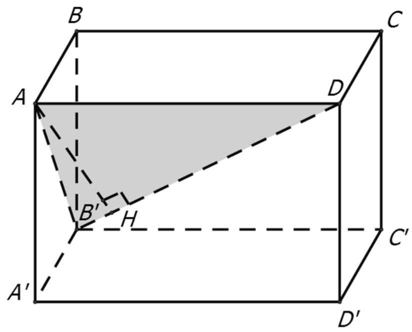
Hướng dẫn giải:

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống DB'.

Dễ thấy $AD \perp (ABB'A') \Rightarrow \Delta ADB'$ vuông đỉnh A.

$AD = a; AB' = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Đáp án **D.**



Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ ba điểm nào sau đây đến đường chéo AC' bằng nhau ?

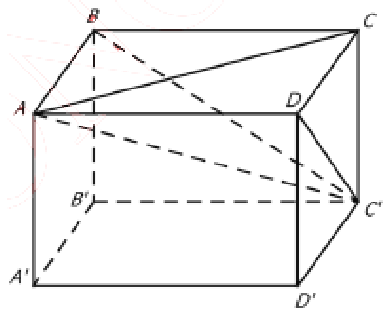
A. A', B, C'. **B.** B, C, D. **C.** B', C', D'. **D.** A, A', D'.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy các tam giác $ABC', C'CA, ADC'$ là các tam giác vuông bằng nhau nên các đường cao hạ từ đỉnh góc vuông xuống canh huyền cũng bằng nhau.

Vậy: $d(B, AC') = d(C, AC') = d(D, AC')$

Đáp án **B.**

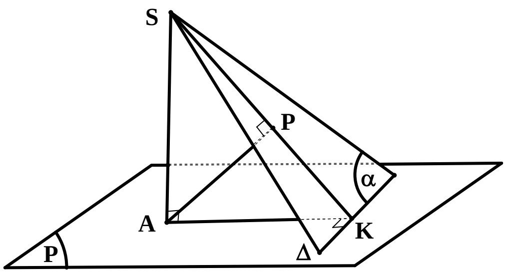


DẠNG 2: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG.

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

Phương pháp này, chúng tôi chia ra làm 3 trường hợp sau (minh hoạ bằng hình vẽ):

TH 1: A là chân đường cao, tức là $A \equiv H$.

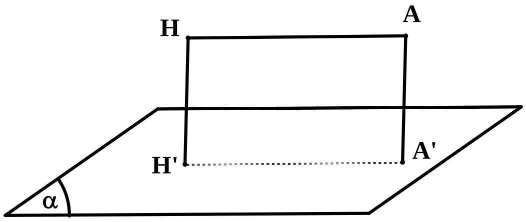


Bước 1: Dựng $AK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp (SAK) \Rightarrow (\alpha) \perp (SAK)$

và $(\alpha) \cap (SAK) = SK$.

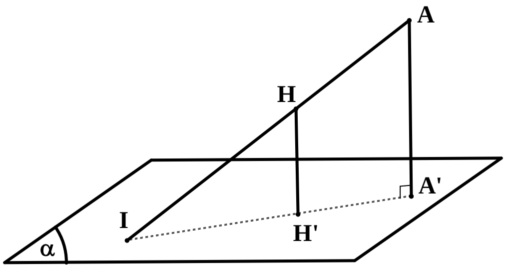
Bước 2: Dựng $AP \perp SK \Rightarrow AP \perp (\alpha) \Rightarrow d(A,(\alpha)) = AP$.

TH 2: Dựng đường thẳng AH, $AH \parallel (\alpha)$.



Lúc đó: $d(A,(\alpha)) = d(H,(\alpha))$.

TH 2: Dựng đường thẳng AH, $AH \cap (\alpha) = \{I\}$.



Lúc đó: $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(H,(\alpha))} = \dfrac{IA}{IH} \Rightarrow \quad d(A,(\alpha)) = \dfrac{IA}{IH}.d(H,(\alpha))$

- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tư như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:
- Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì

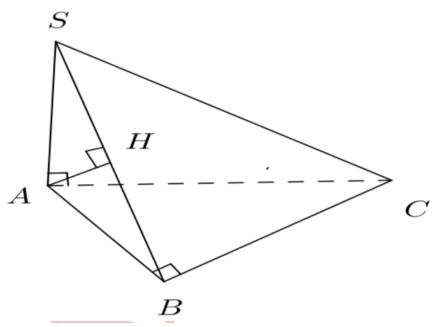
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Kẻ $AH \perp SB$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AH$.

Trong tam giác vuông SAB ta có:

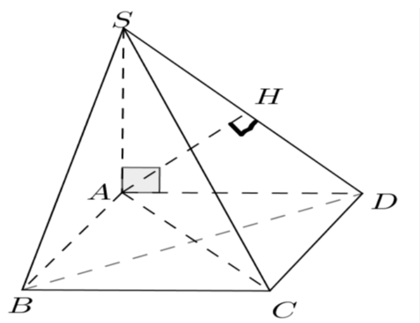
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Kẻ $AH \perp SD$, mà vì $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ nên $d(A;SCD) = AH$.

Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2}$$

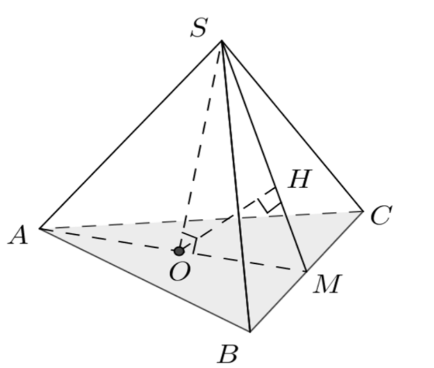
$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



$SO \perp (ABC)$, với O là trọng tâm của tam giác ABC. M là trung điểm của BC.

Kẻ $OH \perp SM$, ta có

$$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp MO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow BC \perp OH$$

nên suy ra $d\left(O;(SBC)\right) = OH$.

Ta có: $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OM^2}$

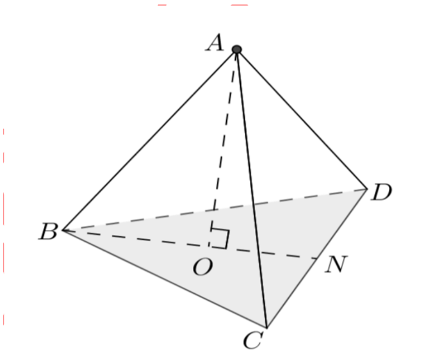
$\Rightarrow OH=\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3a^2+\frac{3}{9}a^2}}=\frac{3a}{\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{3}{10}}a$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



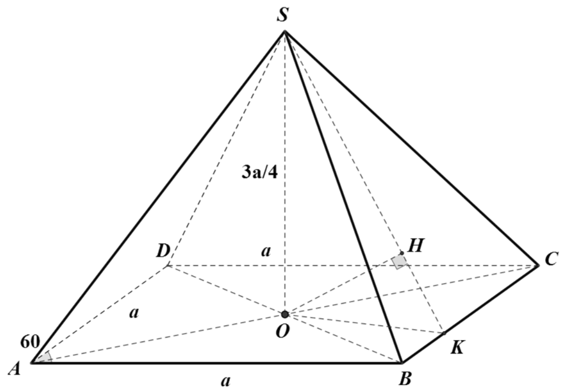
Ta có: $AO\perp(BCD)\Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác BCD.

$d(A;(BCD))=AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD}=60^o$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và $SO=\frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là:

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

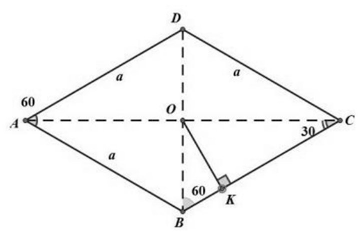


Trong mặt phẳng $(ABCD)$: kẻ $OK\perp BC\,(K\in BC)$.

Mà $BC\perp SO$ nên suy ra hai mặt phẳng (SOK) và (SBC) vuông góc nhau theo giao tuyến SK.

Trong mặt phẳng (SOK): kẻ $OH\perp SK\,(H\in SK)$.

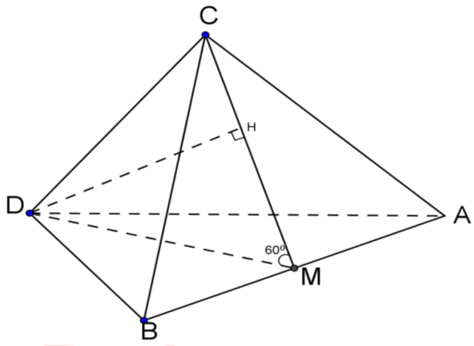
Suy ra: $OH\perp(SBC)\Rightarrow d(O,(SBC))=OH$.



Câu 6: Cho hai tam giác ABC và ABD nằm trong hai mặt phẳng hợp với nhau một góc 60^o, ΔABC cân ở C, ΔABD cân ở D. Đường cao DK của ΔABD bằng $12cm$. Khoảng cách từ D đến (ABC) bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm **B.** $6\sqrt{3}$ cm **C.** 6 cm **D.** $6\sqrt{2}$ cm

Hướng dẫn giải:



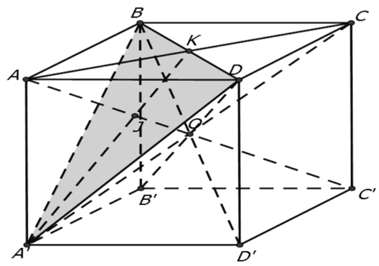
□ Gọi M là trung điểm AB suy ra:
□ Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên CM
$\Rightarrow DH = d(\text{D},(\text{ABC}))$
□ $DH = \sin 60^0.DM = 6\sqrt{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách từ tâm của hình lập phương đến mặt phẳng (BDA') bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:



Bài toán chứng minh $AC' \perp (A'BD)$ trong sách giáo khoa đã có. Không chứng minh lại.

Dễ dàng tìm được $AC' = a\sqrt{3}$

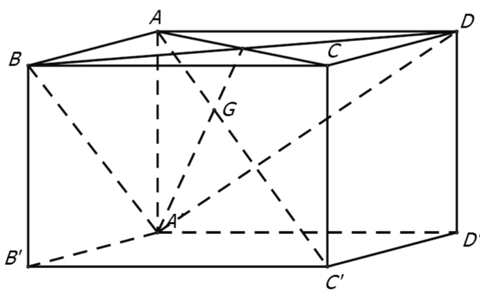
$$d\left(O,\left(A'BD\right)\right) = OJ = \frac{1}{6}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Đáp án: **D**

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến (BDA') bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\left.\begin{matrix} AC' \perp (BDA') \\ AC' \cap (BDA') = \{G\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\left(A,\left(BDA'\right)\right) = AG = \frac{1}{3}AC'$

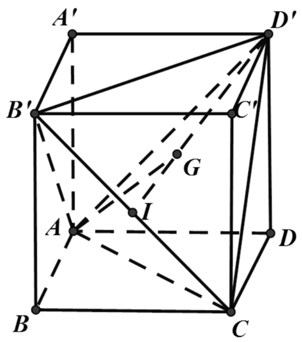
$$d\left(A,\left(BCA'\right)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Đáp án **B.**

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến $(B'CD')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $AB' = AC = AD' = B'D' = B'C = CD' = a\sqrt{2}$
Nên tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.
Gọi I là trung điểm $B'C$, G là trọng tâm tam giác $B'CD'$.
Khi đó ta có: $d\left(A;\left(B'CD'\right)\right) = AG$

Vì tam giác $B'CD'$ đều nên $D'I = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $D'G = \dfrac{2}{3}D'I = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

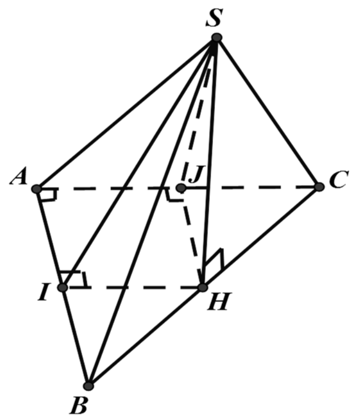
Trong tam giác vuông AGD' có:

$AG = \sqrt{D'A^2 - D'G^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C**

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $AB = a$. Mặt bên chứa BC của hình chóp vuông góc với mặt đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng đáy (ABC).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), vì mặt bên (SBC) vuông góc với (ABC) nên $H \in BC$.

Dựng $HI \perp AB, HJ \perp AC$, theo đề bài ta có $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^0$.
Do đó tam giác $SHI = SHJ$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)
Suy ra $HI = HJ$.
Lại có $\hat{B} = \hat{C} = 45^0 \Rightarrow \Delta BIH = \Delta CJH \Rightarrow HB = HC$

Vậy H trùng với trung điểm của BC. Từ đó ta có HI là đường trung bình của tam giác ABC nên $HI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác SHI vuông tại H và có $\widehat{SIH} = 45^0 \Rightarrow \Delta SHI$ vuông cân.

Do đó: $SH = HI = \dfrac{a}{2}$.**Chọn đáp án A.**

Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng b, cạnh đáy bằng d, với $d < b\sqrt{3}$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định bên dưới.

A. $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - \dfrac{1}{2}d^2}$. **B.** $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - d^2}$.

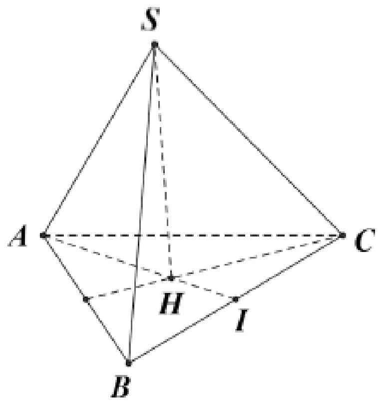
C. $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - \dfrac{1}{3}d^2}$. **D.** $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 + d^2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của BC, H là trọng tâm tam giác ABC.
Do S.ABC là hình chóp đều nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow d\left(S,\left(ABC\right)\right) = SH$.

Ta có $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{4}}=\frac{d\sqrt{3}}{2}$.

$AH=\frac{2}{3}AI=\frac{d\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{b^2-\frac{d^2}{3}}$. Chọn C.



Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao $SO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh bên SA bằng

A. $a\sqrt{6}$.　　**B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.　　**C.** $a\sqrt{3}$.　　**D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

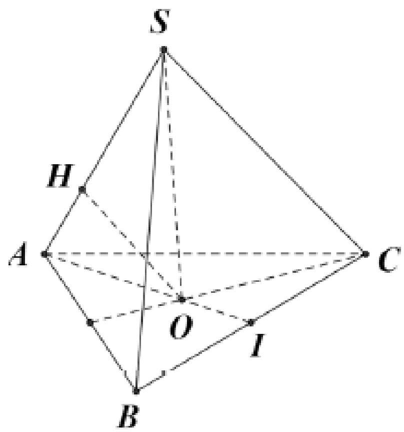
Vì hình chóp $S.ABC$ đều có SO là đường cao $\Rightarrow$ O là tâm của ΔABC

Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Tam giác ABC đều nên $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AO=\frac{2}{3}AI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $OH\perp SA.\Rightarrow d(O,SA)=OH$. Xét tam giác SOA vuông tại O :

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{6}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng (C_1D_1M) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$　　**B.** $\frac{2a}{\sqrt{6}}$　　**C.** $\frac{1}{2}a$　　**D.** a

Hướng dẫn giải:

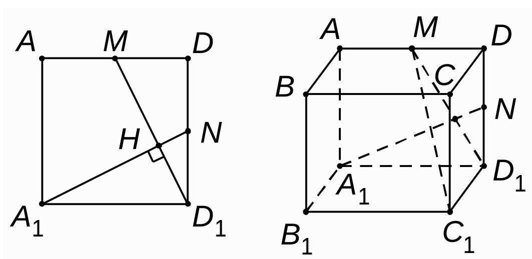
Gọi N là trung điểm cạnh DD_1 và $H=A_1N\cap MD_1$

Khi đó ta chứng minh được $A_1N\perp MD_1$

suy ra $A_1N\perp(C_1D_1M)$

$\Rightarrow d(A_1,(C_1D_1M))=AH=\frac{A_1D_1^2}{A_1N}=\frac{A_1D_1^2}{\sqrt{A_1D_1^2+ND_1^2}}$

$\Rightarrow d(A_1,(C_1D_1M))=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

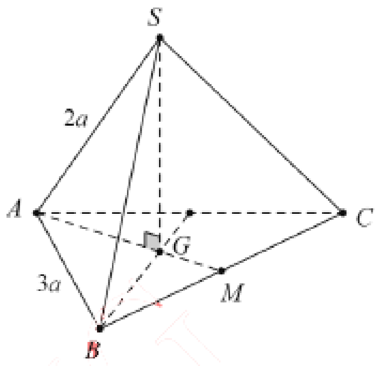


Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $4a$.   **B.** $3a$.   **C.** a.   **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải:



• Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là chóp đều nên $SG\perp(ABC)$.

• $AM=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}AM=a\sqrt{3}.$

• ΔSAG vuông tại $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a.$

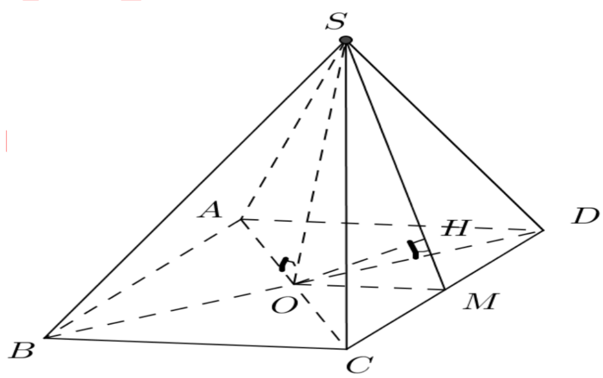
Chọn đáp án C.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.   **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$.   **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



$SO\perp(ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

M là trung điểm của CD.

Kẻ $OH\perp SM$, ta có:

$\begin{cases}DC\perp SO\\DC\perp MO\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SOM)\Rightarrow DC\perp OH$.

nên suy ra $d(O;(SCD))=OH$.

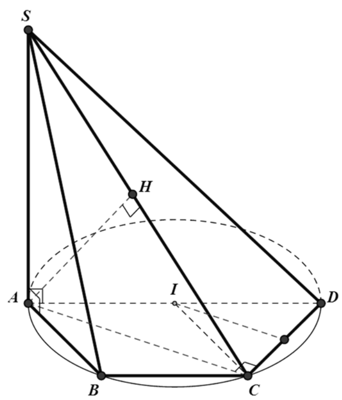
Ta có: $OM=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}\Rightarrow OH=\dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD) lần lượt là:

A. $a\sqrt{2}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$; $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$; $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d(A,(SCD))=AH;\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{6a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{1}{2a^2}\Rightarrow AH=a\sqrt{2}$.

☑ $d(B,(SCD))=d(I,(SCD))=\dfrac{1}{2}.d(A,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = b, AA_1 = c. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?

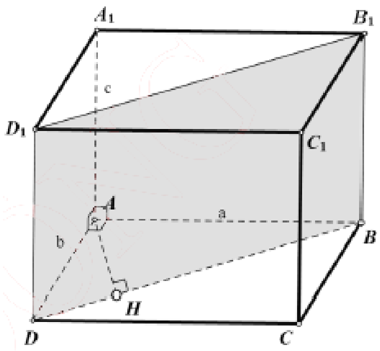
A. khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b.

B. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d\left(AB,CC_1\right)=BC=b\Rightarrow$ Câu A đúng.

☑

$$d\left(A,\left(B_1BD\right)\right)=AH;\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{(ab)^2}\Rightarrow AH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Câu B đúng.

☑ Suy ra câu C sai.

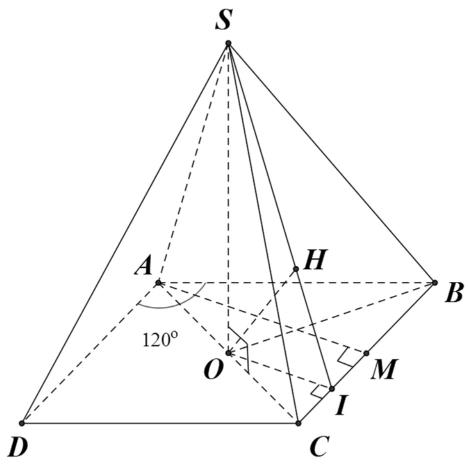
☑ Suy ra câu D đúng, đường chéo hình chữ nhật bằng $BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Chọn đáp án C.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình thoi tâm O, cạnh a và góc $\widehat{BAD}=120^\circ$, đường cao $SO=a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{67}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{47}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Hướng dẫn giải:



Vì hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}$ bằng 120°

Suy ra tam giác ABC đều cạnh a.

Kẻ đường cao AM của tam giác ABC

$\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OI\perp BC$ tại I $\Rightarrow OI=\dfrac{AM}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH\perp SI\Rightarrow OH\perp(SBC)$

$\Rightarrow d\left(O,(SBC)\right)=OH$

Xét tam giác vuông SOI ta có:

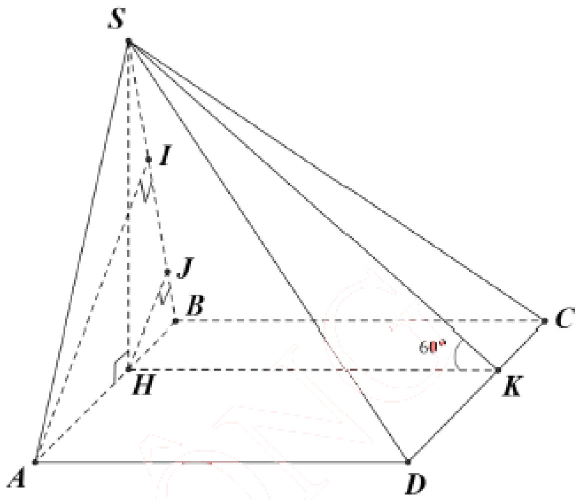
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Chọn D **.**

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=3a;AD=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH=2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.   **B.** $\frac{3a\sqrt{39}}{13}$.   **C.** $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$.   **D.** $\frac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ $HK \perp CD$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$

là $\widehat{SKH} = 60°$

Có $HK = AD = 2a$, $SH = HK.\tan 60° = 2a\sqrt{3}$

Có $BC \perp (SAB)$,

Kẻ $HJ \perp SB$, mà $HJ \perp BC$ $HJ \perp (SBC)$

$\frac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \frac{BA}{BH} = 3$

$d(A,(SBC)) = 3.d(H,(SBC)) = 3HJ$

Mà $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{12a^2} = \frac{13}{12a^2}$

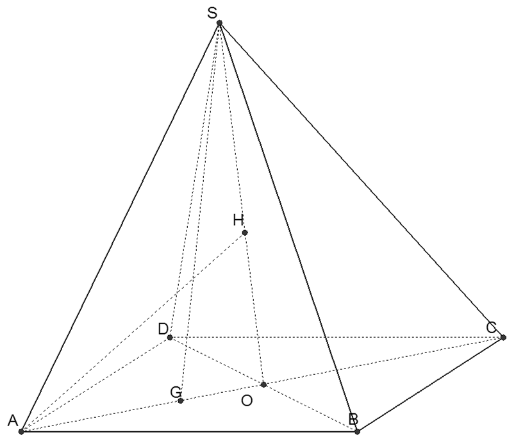
$\Rightarrow HJ = \frac{2a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Chọn C.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a; $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác ABD, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.   **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.   **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Xác định khoảng cách:

- Đặc điểm của hình: Có đáy là hình thoi, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên tam giác ABD đều cạnh a; $AC = a\sqrt{3}$; $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SAC vuông ở S, có đường cao SG nên

$SA = \sqrt{AG.AC} = \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3}} = a$; $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét hình chóp $S.ABD$ có chân đường cao trùng với tâm của đáy nên $SA = SB = SD = a$.

- Dựng hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD): Kẻ đường cao AH của tam giác SAO với O là tâm của hình thoi.

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SG \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp SO \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$. Vậy $d\left(A,(SBD)\right) = AH$

- Tính độ dài AH

$AH = \dfrac{SG.AO}{SO}$

Với $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác: Nhận xét tứ diện $S.ABD$ có tất cả các cạnh bằng a; Do đó $S.ABD$ là tứ diện đều, vậy $AH = SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

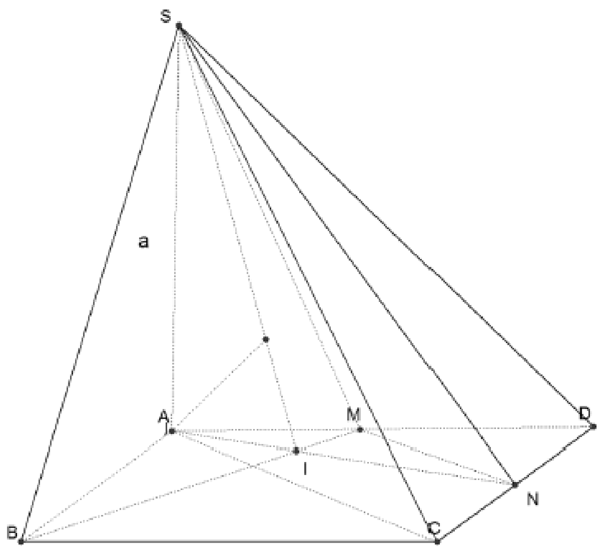
+ Đặc điểm của hình: Đáy là hình vuông $ABCD$ nên $AN \perp BM$.

Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{AIS} = 45^\circ$. Vậy tam giác ASI vuông cân tại A. $AI = a$

- Xác định khoảng cách: $d\left(D,(SBM)\right) = d\left(A,(SBM)\right) = AH$. Với H là chân đường cao của tam giác ASI.

- Tính AH: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{2}{a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Chọn đáp án D



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{33}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{33}}{11}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Hướng dẫn giải:

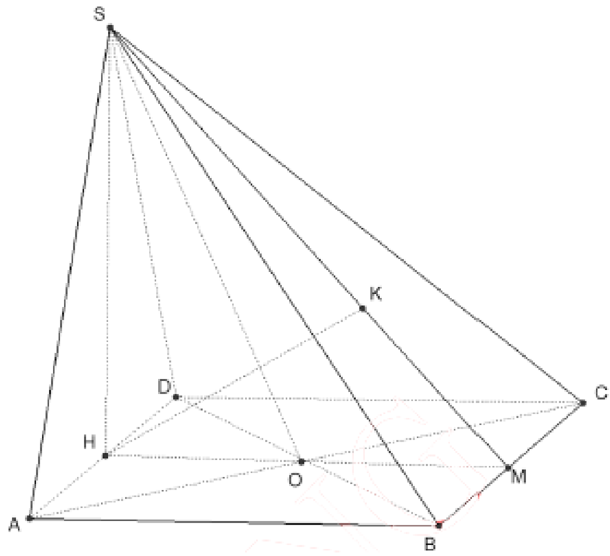
- Đặc điểm của hình: Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH}=60^\circ$.

$IH=\frac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow SH=IH.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

- Xác định khoảng cách: $d\left(H,(SAC)\right)=HK$. Với HK là đường cao của tam giác SHM với M là trung điểm BC.

- Tính HK.

Xét tam giác vuông SHM có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2}+\frac{1}{(a)^2}=\frac{11}{3a^2}$



$HK=\frac{\sqrt{33}a}{11}$. Chọn đáp án C

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh bên SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\frac{3a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{285}}{18}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{285}}{18}$.

Hướng dẫn giải:

Đặc điểm hình: Góc giữa SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDE}=60^\circ$. $DE=\sqrt{OD^2+OE^2}=\frac{2\sqrt{5}a}{6}$;

$SE=DE.\tan 60^0=\frac{2\sqrt{15}}{6}a$

Xác định khoảng cách

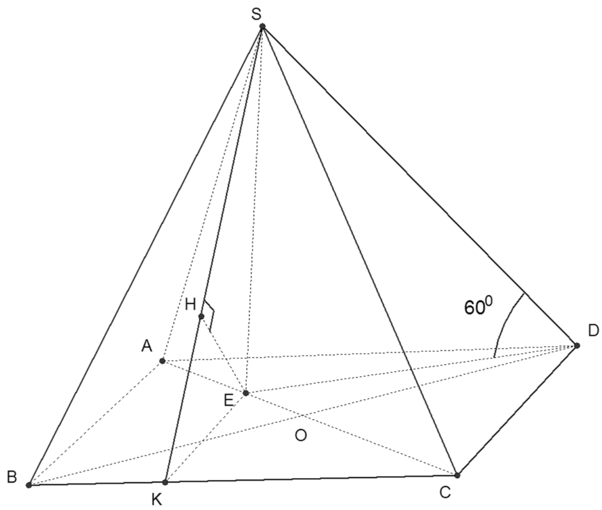
$d\left(A,(SBC)\right)=\frac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right)=\frac{3}{2}EH$

Tính EH:

$\frac{1}{EH^2}=\frac{1}{EK^2}+\frac{1}{ES^2}=\frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{15}a}{6}\right)^2}=\frac{57}{20a^2}$

$EH=\frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{57}}$. Vậy

$d\left(A,(SBC)\right)=\frac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right)=\frac{3}{2}EH=\frac{a\sqrt{285}}{19}$.



Chọn đáp án B.

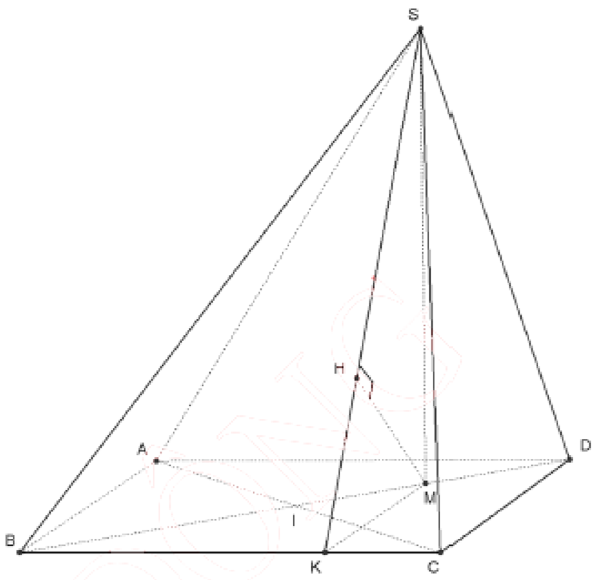
Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I với $AB=2a\sqrt{3};BC=2a$. Biết chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy $ABCD$ trùng với trung điểm đoạn DI và SB hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Khoảng cách từ D đến (SBC) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Đặc điểm của hình: Góc giữa SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBM} = 60^\circ$. $BM = \frac{3}{4}BD = 3a$;

$SM = BM.\tan 60^0 = 3\sqrt{3}a$



Xác định khoảng cách:

$d(D,(SBC)) = \frac{4}{3}d(M,(SBC)) = \frac{4}{3}MH$

Tính khoảng cách MH :

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MS^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}.2\sqrt{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(3\sqrt{3}a\right)^2} = \frac{5}{27a^2}$$

$MH = \sqrt{\frac{27}{5}}a$, vậy

$$d(D,(SBC)) = \frac{4}{3}d(M,(SBC)) = \frac{4}{3}MH = \frac{4\sqrt{15}}{5}a$$

Chọn đáp án C.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3MA$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCM) là

A. $\frac{\sqrt{34}a}{51}$. **B.** $\frac{2\sqrt{34}a}{51}$. **C.** $\frac{3\sqrt{34}a}{51}$. **D.** $\frac{4\sqrt{34}a}{51}$.

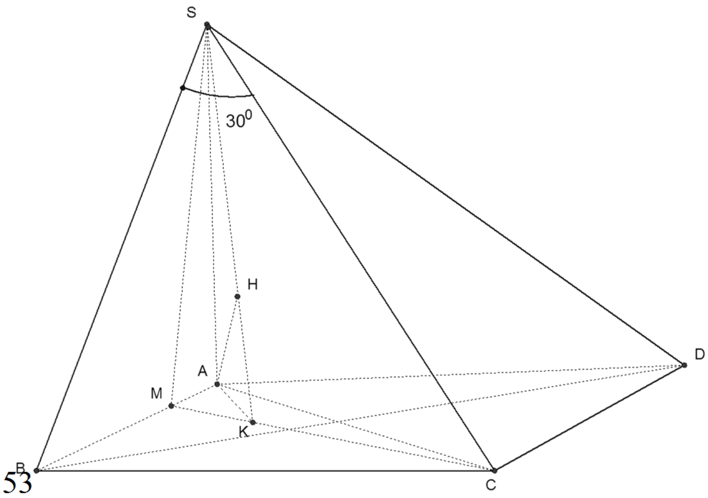
Đặc điểm của hình: SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc $\widehat{CSB} = 30^\circ$. $BC = \sqrt{3}a$;

$SB = BC.\tan 30^0 = a$;

$MC = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + 3a^2} = \frac{\sqrt{57}}{4}a$; $MA = \frac{a}{4}$;

$AC = 2a$; $AS = 2\sqrt{2}a$

$AK = \frac{2S_{AMC}}{MC} = \frac{\sqrt{19}}{19}a$



Xác định khoảng cách: $d(A,(SBC)) = AH$

Tính AH

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{19}}{19}a\right)^2} + \frac{1}{\left(2\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{153}{8a^2}$$

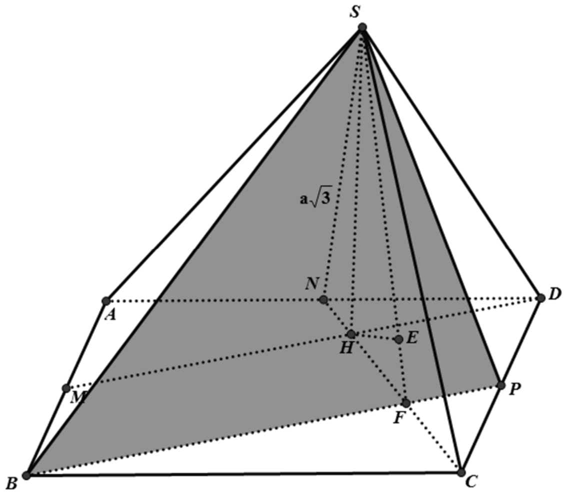
Vậy $d(A,(SBC)) = AH = \frac{2\sqrt{34}}{51}$

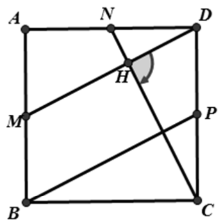
Chọn đáp án B.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và DC. Gọi H là giao điểm của CN và DM, biết SH vuông góc $(ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBP) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:





Ta chứng minh : $NC \perp MD$

Thật vậy : $\Delta ADM = \Delta DCM$ vì $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0; AD = DC; AM = DN$

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN}$; mà $\widehat{ADM} + \widehat{MDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MDC} + \widehat{DCN} = 90^0 \Rightarrow NC \perp MD$

Ta có : $BP \perp NC (MD // BP); BP \perp SH \Rightarrow BP \perp (SNC) \Rightarrow (SBP) \perp (SNC)$

Kẻ $HE \perp SF \Rightarrow HE \perp (SBP) \Rightarrow d(H,(SBP)) = d(C,(SBP)) = HE$

Do $DC^2 = HC.NC \Rightarrow HC = \frac{DC^2}{NC} = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Mà $HE = \frac{SH.HF}{SF} = \frac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $AD = 2a\sqrt{2}; BC = a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ M là trung điểm đoạn AB đến mặt phẳng (SCD) là

A. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\frac{9a\sqrt{15}}{20}$.

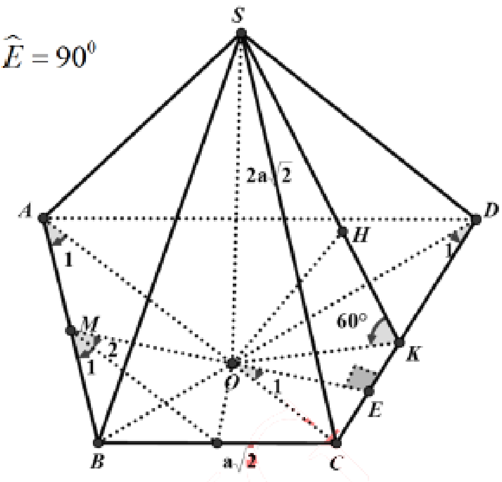
Hướng dẫn giải:

Do $(SAC) \perp (ABCD), (SBD) \perp (ABCD), (SAC) \cap (SBD) = SO \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Dựng góc giữa $(SCD), (ABCD)$:

$(SCD) \cap (ABCD) = DC$. Kẻ $OK \perp DC \Rightarrow SK \perp DC \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SKO}$

Kéo dài MO cắt DC tại E



Ta có : $\widehat{A_1}=\widehat{D_1};\widehat{A_1}=\widehat{M_1};\widehat{M_1}=\widehat{M_2}=\widehat{O_1}\Rightarrow \widehat{D_1}=\widehat{O_1};\widehat{O_1}+\widehat{EOD}=90^0\Rightarrow \widehat{E}=90^0$

$\Rightarrow E\equiv K$

Ta có: $OK=\dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}};OM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2};MK=\dfrac{9a\sqrt{5}}{10}$

$\dfrac{d(O,(SCD))}{d(M,(SCD))}=\dfrac{OE}{ME}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)$

$=\dfrac{9}{4}d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{9}{4}OH$

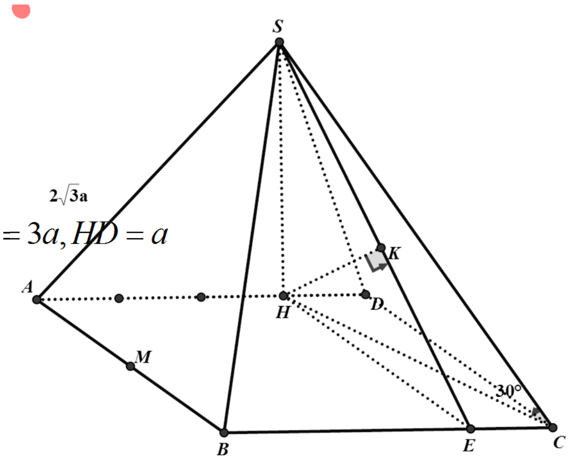
$OS=OK.\tan 60^0=\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

$\Rightarrow OH=\dfrac{OK.OS}{\sqrt{OK^2+OS^2}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng $SA=2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 30°. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{66}a}{11}$.	**B.** $\dfrac{\sqrt{11}a}{66}$.	**C.** $\dfrac{2\sqrt{66}a}{11}$.	**D.** $\dfrac{\sqrt{66}a}{11}$.

Hướng dẫn giải:



SC có hình chiếu vuông góc lên mp$(ABCD)$ là HC

$\Rightarrow \widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SCH}=30^0$

Đặt $AD=4x\ (x>0)$

Ta có :

$SA^2=AH.AD\Rightarrow 12a^2=12x^2\Rightarrow x=a\Rightarrow AD=4a,AH=3a,HD=a$

Mà :

$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow HC=3a\Rightarrow DC=2\sqrt{2}a$

Kẻ $HE\perp BC,SH\perp BC\Rightarrow (SHE)\perp(SBC)$

Kẻ

$HK\perp SE\Rightarrow HK\perp(SBC)\Rightarrow d\left(H,SBC\right)=HK\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{HK}{2}$

$HK=\dfrac{SH.EH}{\sqrt{SH^2+EH^2}}=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$

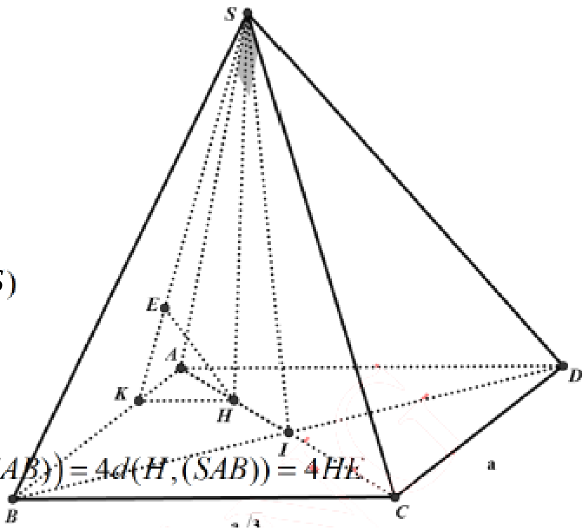
Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB=a;BC=a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AI. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.	**B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.	**C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.	**D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$, **mà** ΔSAC **vuông tại** S $\Rightarrow SI=\dfrac{AB}{2}=a$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SI^2-HI^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Kẻ

$HK\perp AB; AB\perp SH\Rightarrow AB\perp(KHS)\Rightarrow(SAB)\perp(KHS)$

Mà $(SAB)\cap(KHS)=SK$. **Kẻ**

$HE\perp SK\Rightarrow HE\perp(SAB)\Rightarrow d(H,(SCD))=HE$

$A=HC\cap(SAB)\Rightarrow\dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))}=\dfrac{CA}{HA}=4\Rightarrow d(C,(SAB))=4d(H,(SAB))=4HE$

$$HE=\frac{HK.SH}{\sqrt{HK^2+SH^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{16}+\frac{3a^2}{4}}}=\frac{a\sqrt{15}}{10}\Rightarrow d(C,(SAB))=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O, hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của AO, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SCD) tính theo a bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

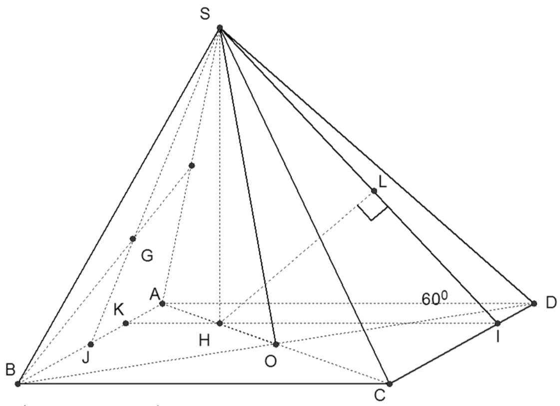
Chọn D.

Ta có:

$\dfrac{HI}{AD}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow HI=\dfrac{3a}{4}$

$\tan 60^0=\dfrac{SH}{HI}\Rightarrow SH=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$

$SI=\sqrt{SH^2+HI^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2}=\dfrac{3}{2}a$



$d(G,(SCD))=\dfrac{3}{2}d(J,(SCD))=\dfrac{2}{3}d(K,(SCD))=\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3}.d(H,(SCD))$

$$=\frac{8}{9}d(H,(SCD))=\frac{8}{9}HL=\frac{8}{9}.\frac{SH.HI}{SI}=\frac{8}{9}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a.\frac{3a}{4}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Cạnh

bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{3a}{13}$.

Hướng dẫn giải:

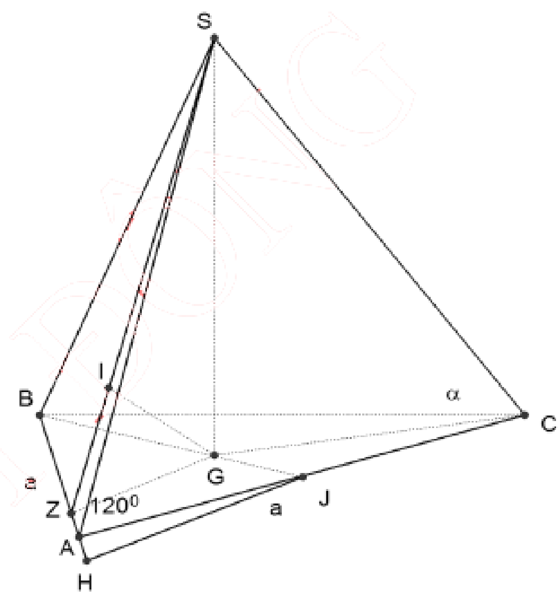
Chọn B.

Ta có:

Gọi H là hình chiếu của J lên AB

Gọi G là hình chiếu của G lên AB

Gọi I là hình chiếu của G lên SZ



$$BJ = \sqrt{BA^2 + AJ^2 - 2BA.AJ.cos120^0} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$S_{\Delta BAJ} = \frac{1}{2}.AB.AJ.\sin120^0 = \frac{1}{2}JH.AB \Leftrightarrow JH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

$$\frac{GZ}{JH} = \frac{BG}{BJ} = \frac{2}{3} \Rightarrow GZ = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\tan\alpha = \frac{SG}{GC} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{SG}{BG} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{SG}{\frac{2}{3}BJ}$$

$$\Leftrightarrow SG = \frac{2}{\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{2}a = a$$

$$d\left(C,(SAB)\right) = 3d\left(G,(SAB)\right) = 3GI = 3.\frac{SG.GZ}{SZ}$$

$$= 3\frac{SG.GZ}{\sqrt{SG^2 + GZ^2}} = 3.\frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$$

Câu 32: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SMN) tính theo a bằng

A. $\frac{a}{7}$. **B.** $\frac{7a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:

Trong ΔSGC vuông tại G suy ra $SG = GC\sqrt{3} = \frac{2}{3}\frac{3a}{2} = a$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của G trên MN và SE.

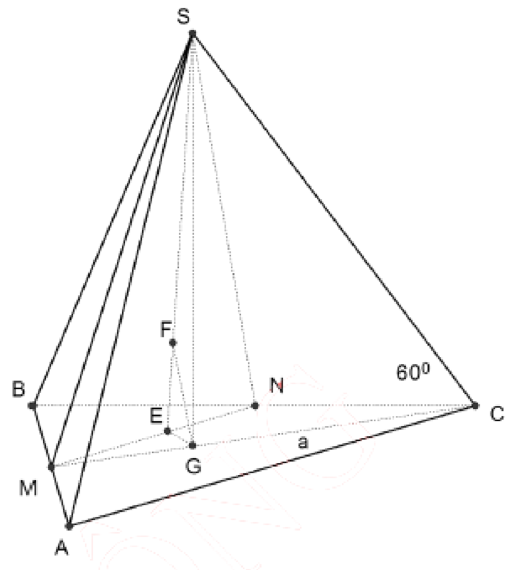
Khi đó $d\left(C,(SMN)\right) = 3d\left(G,(SMN)\right) = 3GF$

Ta có : $GE = \frac{1}{2}d\left(G,\text{AC}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.d\left(M,\text{AC}\right)$

$= \frac{1}{3}d\left(M,\text{AC}\right) = \frac{1}{6}d\left(B,\text{AC}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$

Trong ΔSGE vuông tại H suy ra

$$GF = \frac{GE.SG}{\sqrt{GE^2+SG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2+a^2}} = \frac{a}{7}$$



Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ là

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{2\sqrt{29}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:

Trong ΔACI có trung tuyến AH suy ra

$$AH = \sqrt{\frac{2\left(AI^2+AC^2\right)-CI^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

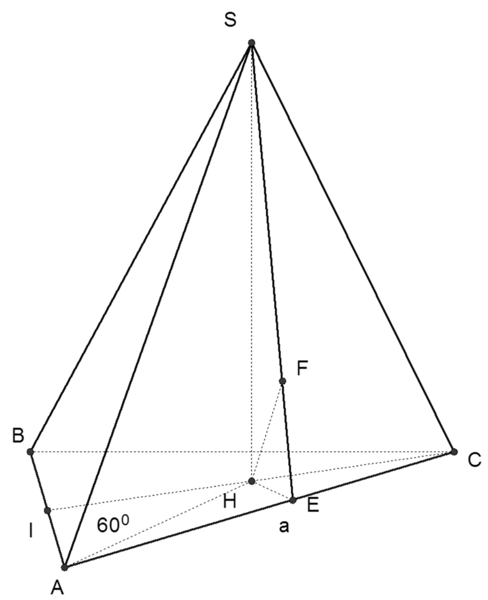
Trong ΔSHA vuông tại H suy ra $SH = AH\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$

Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của H trên BC và SE. Khi đó $d\left(H,\left(SBC\right)\right) = HF$

Ta có : $HE = \frac{1}{2}d\left(I,BC\right) = \frac{1}{4}d\left(\text{A},BC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$

Trong ΔSHE vuông tại H suy ra

$$HF = \frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2+SH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{a\sqrt{21}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{21}}{4}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}.$$

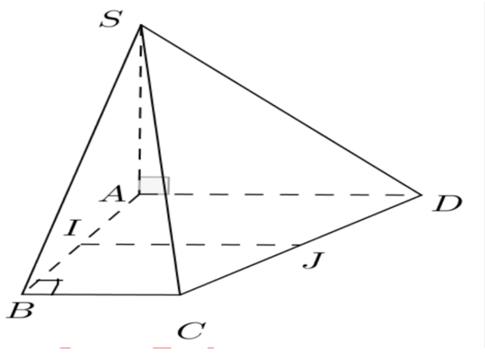


DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn C.

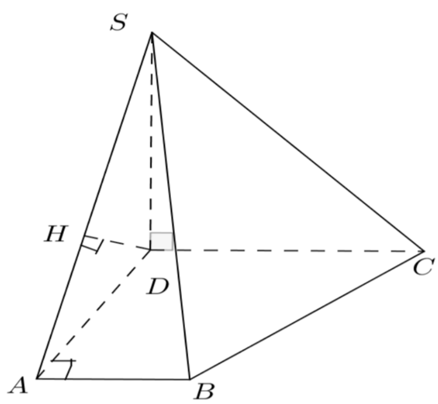
Ta có: Vì $IJ\,//\,AD$ nên $IJ\,//\,(SAD)$

$\Rightarrow d\left(IJ;(SAD)\right)=d\left(\text{I};(SAD)\right)=IA=\frac{a}{2}$.

Câu 2: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khỏang cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Vì $DC\,//\,AB$ nên $DC\,//\,(SAB)$

$\Rightarrow d\left(DC;(SAB)\right)=d\left(D;(SAB)\right)$.

Kẻ $DH\perp SA$, do $AB\perp AD$, $AB\perp SA$ nên $AB\perp(SAD)\Rightarrow DH\perp AB$ suy ra $d(D;SC)=DH$.

Trong tam giác vuông SAD ta có:

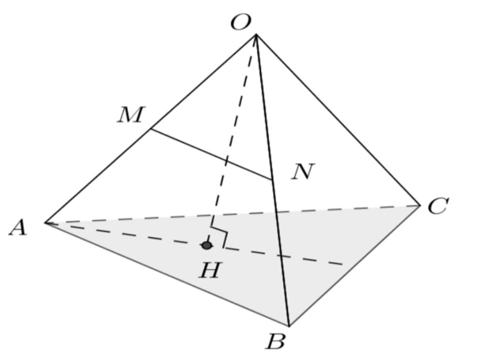
$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow DH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



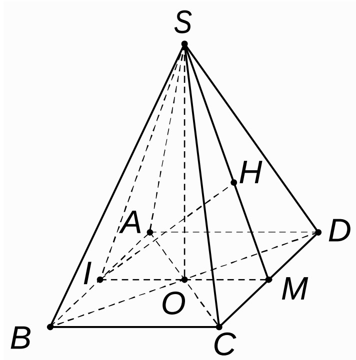
Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên $MN\,//\,AB$ $MN\,//\,(ABC)$.

Ta có: $d\left(MN;(ABC)\right)=d\left(M;(ABC)\right)=\frac{1}{2}OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (vì M là trung điểm của OA).

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=SA=2a$. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:



Gọi I,M lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD thì $CD\perp(SIM)$

Vẽ $IH\perp SM$ tại $H\in SM$ thì $IH\perp(SCD)$

$\Rightarrow d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(I,(SCD)\right)=IH=\frac{SO.IM}{SM}$

ΔSAB đều cạnh $2a\Rightarrow SI=a\sqrt{3}\Rightarrow SM=a\sqrt{3}$

Và $OM=\frac{1}{2}IM=a\Rightarrow SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=a\sqrt{2}$

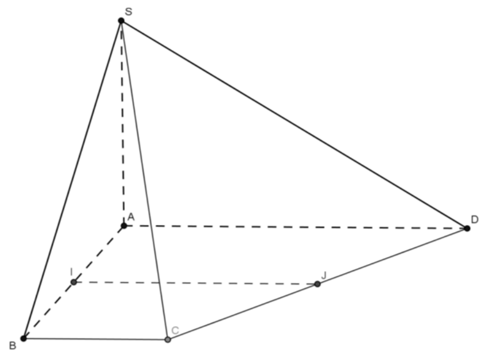
Cuối cùng $d\left(AB,(SCD)\right)=\frac{SO.IM}{SM}=\frac{a\sqrt{2}.2a}{a\sqrt{3}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB=a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Tính khỏang cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải:



$IJ//\text{AD}\Rightarrow IJ//(SAD)$

$\Rightarrow d\left(IJ,(\text{SAD})\right)=d\left(I,(SAD)\right)=IA=\frac{a}{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 6: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tính khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC):

$d\left(MN,(ABC)\right)=d\left((MNP),(ABC)\right)=\frac{OH}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

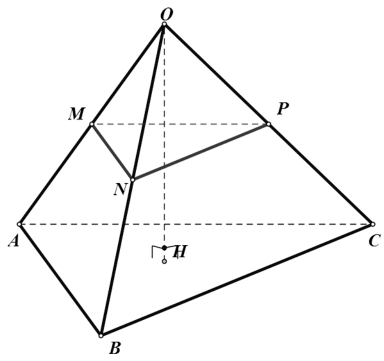
Hướng dẫn giải:

Do $MN//(ABC) \Rightarrow d(MN,(ABC)) = d(M,(ABC))$

Lại có $\dfrac{OA}{MA} = \dfrac{d(O,(ABC))}{d(M,(ABC))} = 2 \Rightarrow d(M,(ABC))$

$= \dfrac{1}{2} d(O,(ABC)) = \dfrac{OH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Chọn D .



Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, mặt đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

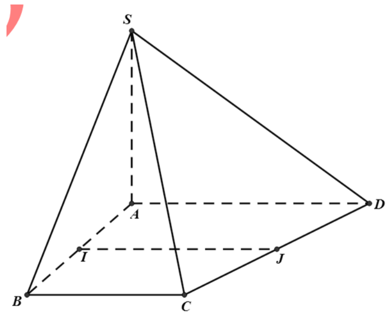
Hướng dẫn giải:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AI$ ·

Lại có $AI \perp AD$ (hình thang vuông) suy ra $IA \perp (SAD)$

$IJ \parallel AD$ theo tính chất hình thang, nên

$d(IJ,(SAD)) = d(I,(SAD)) = IA = \dfrac{a}{2}$



Câu 9: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa DC và (SAB).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

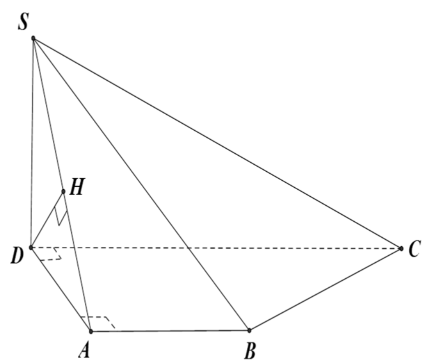
***Trong tam giác** DHA**, dựng** $DH \perp SA$**;**

***Vì** $DC // AB \Rightarrow d(DC;(SAB)) = d(D;(SAB)) = DH$

Xét tam giác vuông SDA **có :**

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

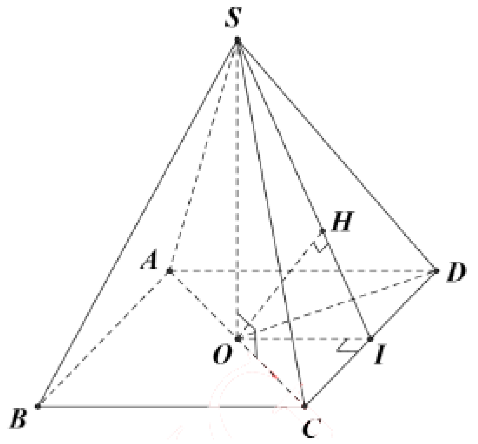
Chọn A.



Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$

Khi đó $SO\perp(ABCD)$.

Kẻ $OI\perp CD, OH\perp SI\Rightarrow OH\perp(SCD)$

Ta tính được $AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$OI=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$

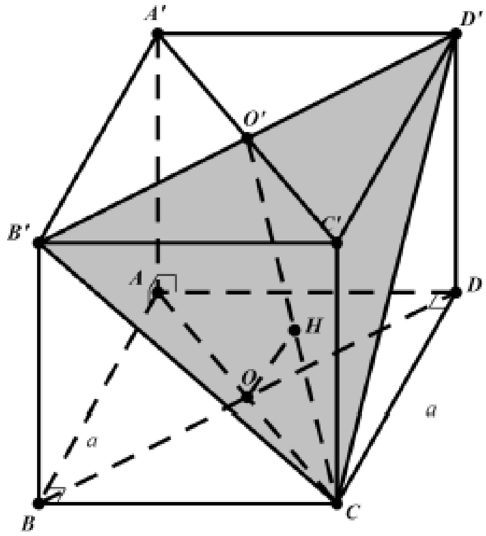
$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\ \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn D .

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó, khoảng cách giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ

$A(0;0;0); B(1;0;0); D(0;1;0); A'(0;0;1)$

$C(1;1;0); B'(1;0;1); D'(0;1;1); C'(1;1;1)$

$\overrightarrow{CB'}=(0;-1;1); \overrightarrow{CD'}=(-1;0;1)$

Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$

Có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CD'}\right]=(-1;-1;-1)$

$(CB'D'):1(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0\Leftrightarrow x+y+z-2=0$

$d\left(BD;(CB'D')\right)=d\left(B;(CB'D')\right)=\dfrac{|1+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d\left(BD;(CB'D')\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Câu 1: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

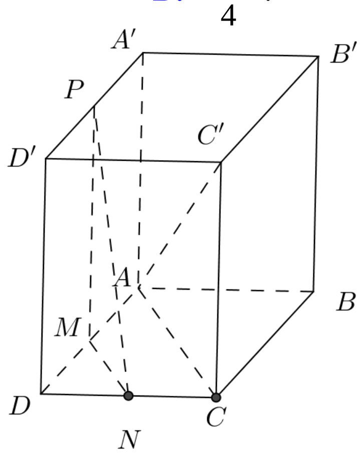
A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $(MNP)//(ACA')$

$\Rightarrow d\left((MNP);(ACA')\right)=d\left(\text{P};(ACA')\right)=\frac{1}{2}OD'=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng $60°$, đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A, B, C. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

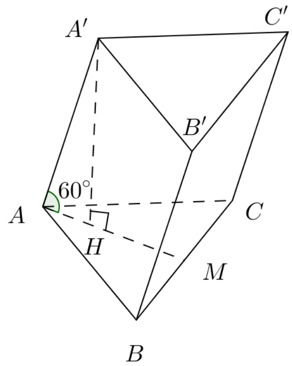
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Vì $\triangle ABC$ đều và $AA'=A'B=A'C \Rightarrow A'ABC$ là hình chóp đều.

Gọi $A'H$ là chiều cao của lăng trụ, suy ra H là trọng tâm $\triangle ABC$, $\widehat{A'AH}=60°$.

$A'H=AH.\tan 60°=\frac{a\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}=a$.



Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh bên bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt đáy góc 60^o. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ là trung điểm của B_1C_1. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng bao nhiêu?

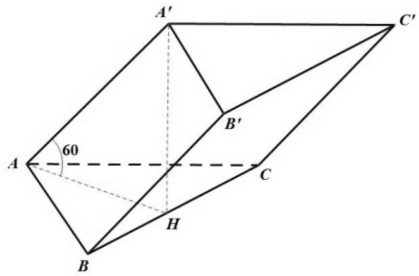
A. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A'H\perp(ABC)\rightarrow \widehat{A'AH}=60^o$.

$d\left((A'B'C'),(ABC)\right)=A'H=A'A.\cos 60^o=a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **A.**



Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là:

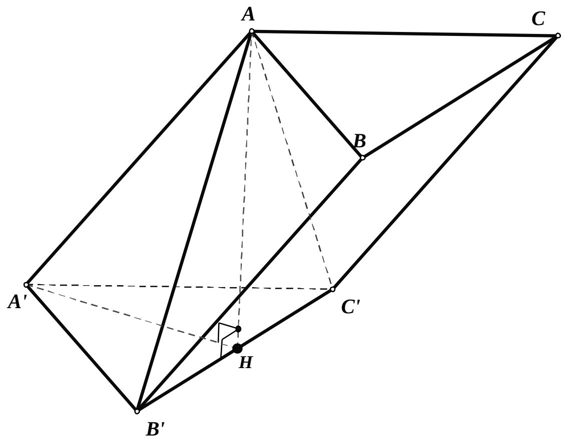
A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

☑ Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a suy ra

$$AB' = AC' \Rightarrow B'H = HC' \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}.$$

Chọn đáp án C.



Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa $(AB'C)$ và $(A'DC')$ bằng :

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

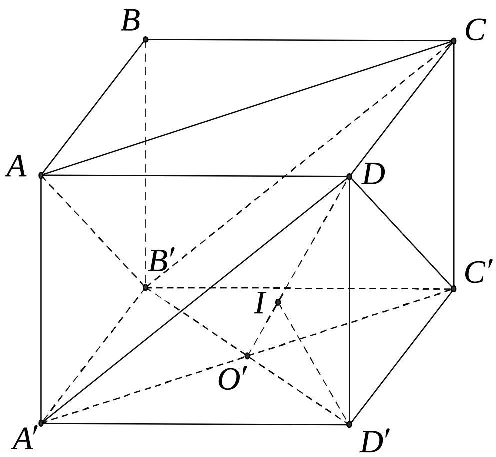
Ta có

$d\left((AB'C),(A'DC')\right) = d\left(B',(A'DC')\right) = d\left(D',(A'DC')\right)$

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi I là hình Chiếu của D' trên $O'D$, suy ra I là hình chiếu của D' trên $(A'DC')$.

$d\left[(AB'C),(A'DC')\right] = d\left[D',(A'DC')\right] =$

$$D'I = \frac{D'O'.D'D}{\sqrt{D'O'^2 + D'D^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án D.

Câu 6: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

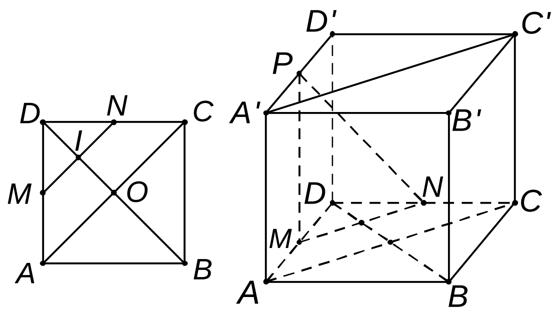
Nhận xét $(ACC') \equiv (ACC'A')$

Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MN \cap BD$

Khi đó, $OI \perp AC$, $OI \perp AA' \Rightarrow OI \perp (ACC'A')$

Suy ra $d\left((MNP),(ACC')\right)=OI=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Chọn đáp án B.



Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ bằng

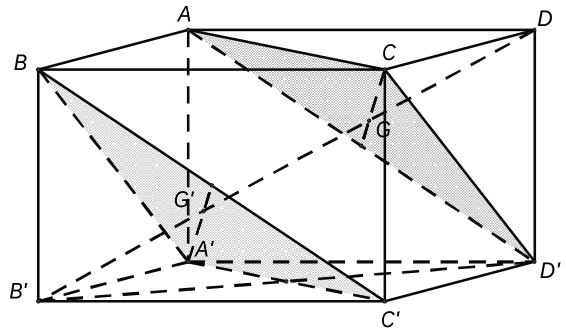
A. khoảng cách từ điểm D' đến đường thẳng $A'C'$.
B. khoảng cách giữa hai điểm B và D'.
C. khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'C'$.
D. khoảng cách giữa trọng tâm của hai tam giác ACD' và $BA'C'$

Hướng dẫn giải:

Ta có $(ACD')//(BA'C')$.

$\begin{cases} DB'\perp(ACD') \\ DB'\perp(BA'C') \end{cases}$ (đã chứng minh trong SGK)

Đáp án **D.**



Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và (BDA') bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.   **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.   **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Vì $\left(A'BD\right)//(B'CD')$ nên ta có:

$d\left(\left(A'BD\right),\left(B'CD'\right)\right)=d\left(C;\left(A'BD\right)\right)=d\left(A;\left(A'BD\right)\right)$.

Vì $AB=AD=AA'=a$ và $A'B=A'D=BD=a\sqrt{2}$ nên $A.A'BD$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi I là trung điểm $A'B$, G là trọng tâm tam giác $A'BD$.

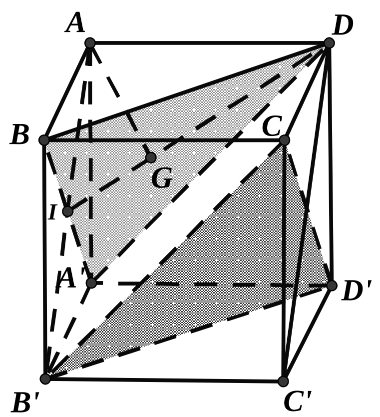
Khi đó ta có: $d\left(A;\left(A'BD\right)\right)=AG$

Vì tam giác $A'BD$ đều nên $DI=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $DG=\dfrac{2}{3}DI=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông AGD có:

$AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{6a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B**



Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa $\left(ACB'\right)$ và $\left(DA'C'\right)$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.   **B.** $a\sqrt{2}$.   **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.   **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

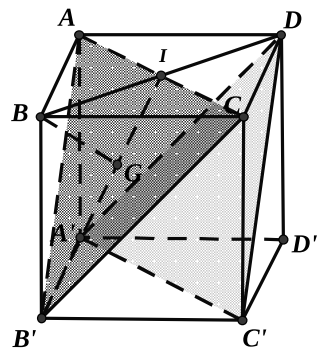
Vì $(ACB')//(DA'C')$ nên ta có:

$d((ACB'),(DA'C')) = d(D;(ACB')) = d(B;(ACB'))$.

Vì $BA = BB' = BC = a$ và $AB' = AC = CB' = a\sqrt{2}$ nên $B.ACB'$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi I là trung điểm AC, G là trọng tâm tam giác ACB'.

Khi đó ta có: $d(B;(ACB')) = BG$



Vì tam giác ACB' đều nên $B'I = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $B'G = \frac{2}{3}B'I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông BGB' có:

$BG = \sqrt{BB'^2 - B'G^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4$, $AD = 3$. Mặt phẳng (ACD') tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình hộp.

A. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.   **B.** $\frac{12\sqrt{3}}{5}$.   **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{5}$.   **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

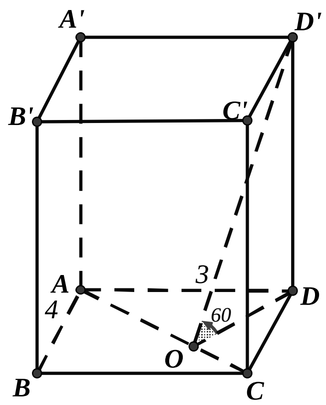
Hướng dẫn giải:

Gọi O là hình chiếu của D lên AC.

Ta có $\begin{cases} (ACD') \cap (ABCD) = AC \\ AC \perp DO \\ AC \perp D'O \left(AC \perp (ODD') \supset OD' \right) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(D'AC),(ABCD)}\right) = \widehat{D'OD} = 60^0$

$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $DO = \frac{AD.DC}{AC} = \frac{12}{5}$



Khoảng cách giữa hai mặt đáy là $DD' = DO.\tan 60^0 = \frac{12\sqrt{3}}{5}$

Chọn đáp án B.

DẠNG 5: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

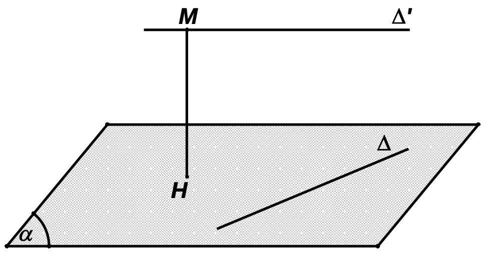
Phương pháp:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

□ Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b) = MN$. Sau đây là một số cách dựng đoạn vuông góc chung thường dùng :

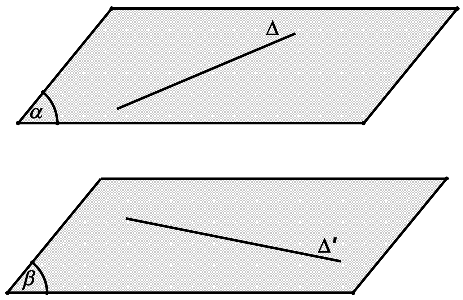
Phương pháp 1

Chọn mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'. Khi đó $d(\Delta,\Delta') = d(\Delta',(\alpha))$



Phương pháp 2

Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.



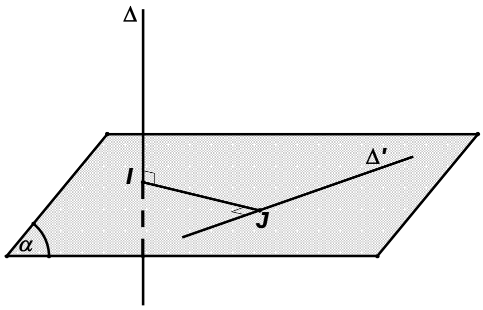
Phương pháp 3 Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Trường hợp 1: Δ và Δ' vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và vuông góc với Δ tại I.

Bước 2: Trong mặt phẳng (α) kẻ $IJ \perp \Delta'$.

Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta') = IJ$.



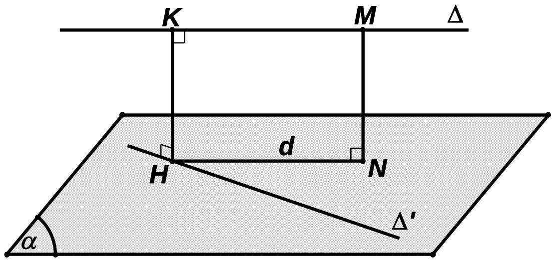
Trường hợp 2: Δ và Δ' chéo nhau mà không vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

Bước 2: Dựng d là hình chiếu vuông góc của Δ xuống (α) bằng cách lấy điểm $M \in \Delta$ dựng đoạn $MN \perp (\alpha)$, lúc đó d là đường thẳng đi qua N và song song với Δ.

Bước 3: Gọi $H = d \cap \Delta'$, dựng $HK \parallel MN$

Khi đó HK là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HK=MN$.



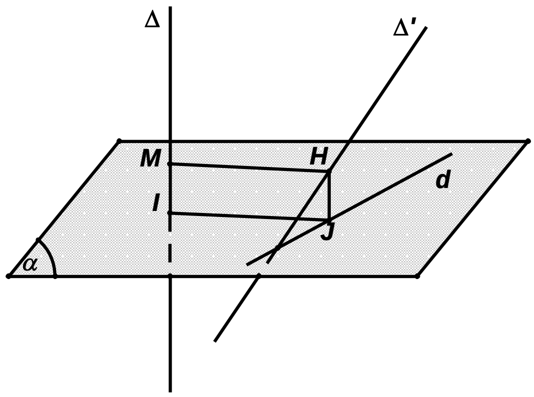
Hoặc

Bước 1: Chọn mặt phẳng $(\alpha)\perp\Delta$ tại I.

Bước 2: Tìm hình chiếu d của Δ' xuống mặt phẳng (α).

Bước 3: Trong mặt phẳng (α), dựng $IJ\perp d$, từ J dựng đường thẳng song song với Δ cắt Δ' tại H, từ H dựng $HM \parallel IJ$.

Khi đó HM là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HM=IJ$.



 Sử dụng phương pháp vec tơ

a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$

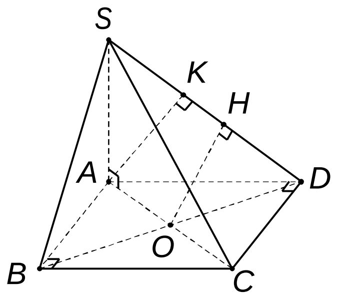
b) Nếu trong (α) có hai vec tơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ thì $OH=d\left(O,(\alpha)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_2}\\ H\in(\alpha)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2}=0\\ H\in(\alpha)\end{cases}$.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và O lên SD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là AK.
B. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là CD.
C. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là OH.
D. Các khẳng định trên đều sai.

Hướng dẫn giải:



Nếu $AK \perp AC$, do $AK \perp AB \Rightarrow AK \perp (ABC)$

$\Rightarrow AK \equiv SA$ (vì $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow SA \perp SD \Rightarrow \Delta SAD$ có 2 góc vuông (vô lý).

Theo tính chất của hình vuông $CD \not\perp AC$.

Nếu $AC \perp OH$, do $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO \Rightarrow \Delta SOA$ có 2 góc vuông (vô lý)

Như vậy $AC \not\perp AK$, $AC \not\perp CD$, $AC \not\perp OH$

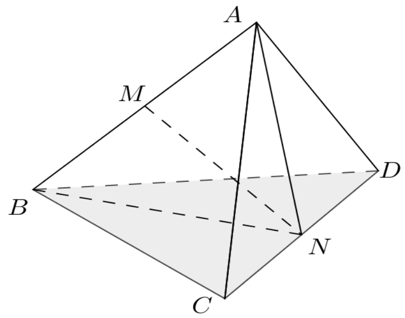
Chọn đáp án D.

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó $NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM \perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM \perp DC$, nên $d(AB;CD) = MN$.

Ta có: $S_{ABN} = \sqrt{p(p-AB)(p-BN)(p-AN)}$ (p là nửa chu vi).

$= \sqrt{\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Mặt khác: $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.MN = \frac{1}{2}a.MN \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

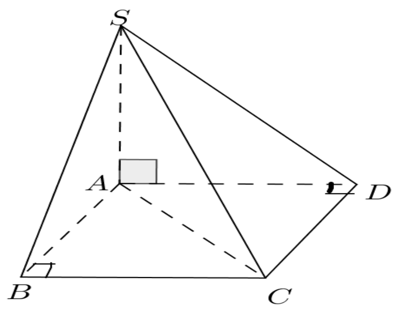
Cách khác. Tính $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $BC \,//\, (SAD)$

$\Rightarrow d(BC;SD) = d(BC;(SAD)) = d(B;(SAD))$.

Mà $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow d(B;(SAD)) = AB$.

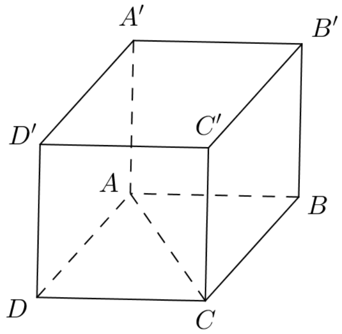
Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = \sqrt{3}a$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



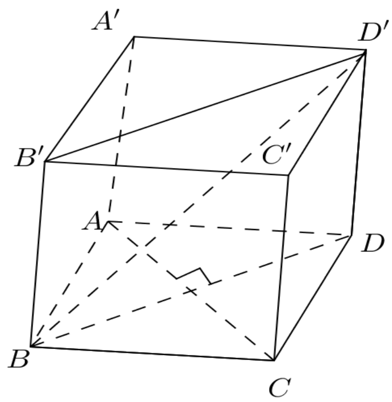
Ta có: $d\left(BB';AC\right)=d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{1}{2}DB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvdt). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



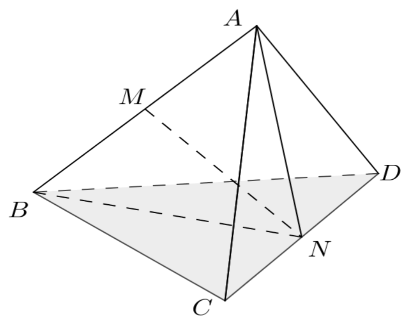
Ta có: $d\left(AA';BD'\right)=d\left(BB';\left(DBB'D'\right)\right)=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai cạnh đối AB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó $NA=NB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM\perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM\perp DC$, nên $d\left(AB;CD\right)=MN$.

Ta có: $S_{ABN}=\sqrt{p\left(p-AB\right)\left(p-BN\right)\left(p-AN\right)}$ (p là nửa chu vi).

$=\sqrt{\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Mặt khác: $S_{ABN}=\frac{1}{2}AB.MN=\frac{1}{2}a.MN\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 7: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AD và $A'C'$ là :

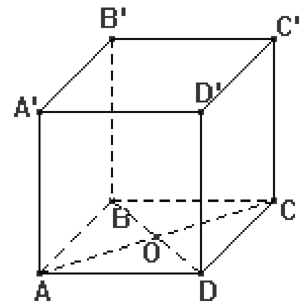
A. AA'. **B.** BB'. **C.** DA'. **D.** DD'.

Hướng dẫn giải:

$\begin{cases} AA' \perp (A'B'C'D') \\ A'C' \subset (A'B'C'D') \end{cases} \rightarrow AA' \perp A'C'$

$\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AD \subset (ABCD \end{cases} \rightarrow AA' \perp AD$

Chọn đáp án **A.**



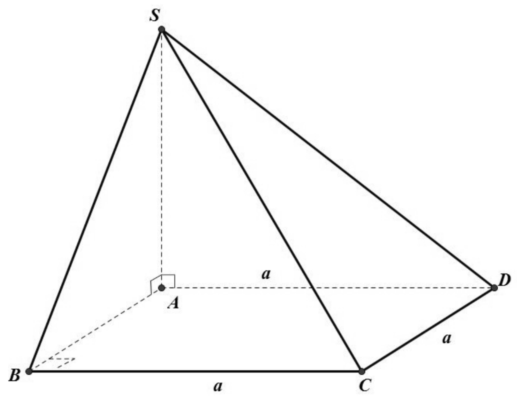
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = AD = a$.

Chọn phương án A.



Câu 9: Cho tứ diện $OABC$ trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa AI và OC bằng bao nhiêu?

A. a **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi J là trung điểm OB. Kẻ OH vuông góc AJ tại H.

Tam giác AOJ vuông tại O, có OH là đường cao

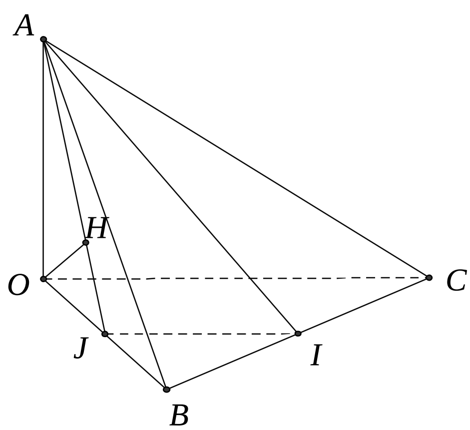
$$OH = \frac{OA.OJ}{\sqrt{OA^2 + OJ^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ta có: $OC // IJ$ nên $OC // (AIJ)$

Do đó:

$$d(AI, OC) = d(OC, (AIJ)) = d(O, (AIJ)) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án B.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại

A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa SB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

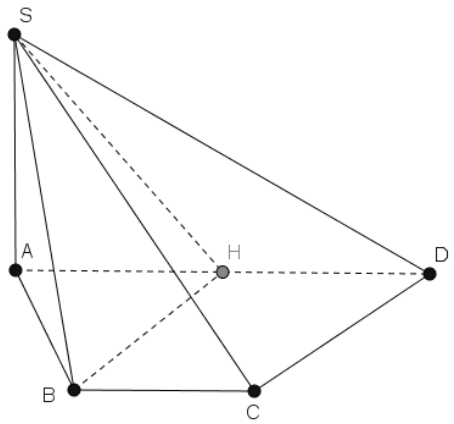
Hướng dẫ giải:

Gọi H là trung điểm AD ta có: $d(CD;SB) = d(D;(SBH)) = d(A;(SBH))$

Mà

$$\frac{1}{d^2(A;(SBH))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{3}{a^2} \to d(CD;SB) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Chọn đáp án C



Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AD = a$. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

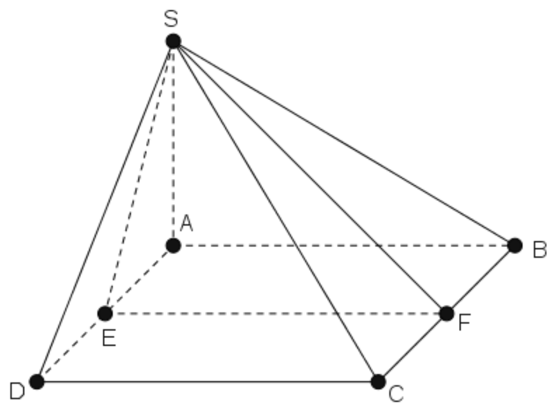
Hướng dẫn giải:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AD, BC. Ta có: $AD, BC \perp (SFE)$, suy ra SF là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SEF)

Nên

$$d(AD;SB) = d(E;SF) = \frac{SE.FE}{\sqrt{SE^2 + FE^2}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

Chọn đáp án B



Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AA_1 = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B_1 và C_1M bằng bao nhiêu?

A. $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

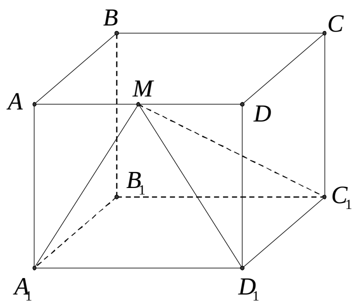
Hướng dẫn giải:

Ta có $A_1B_1 // C_1D_1$ suy ra

$d\left(A_1B_1, C_1M\right) = d\left(A_1B_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right)$

Vì $AA_1 = 2a$, $AD = 4a$ và M là trung điểm AD nên $A_1M \perp D_1M$, suy ra $A_1M \perp \left(C_1D_1M\right)$

$\Rightarrow d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = A_1M = 2a\sqrt{2}$.

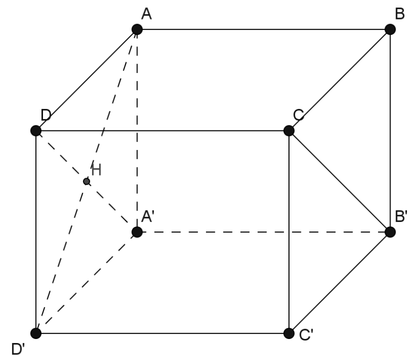


Chọn đáp án B.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và $A'B'$ bằng bao nhiêu ?

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\begin{cases} A'B' \perp A'A \\ A'B' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp (ADD'A')$.

Gọi H là giao điểm của AD' với $A'D$.

$\Rightarrow A'H \perp AD'$

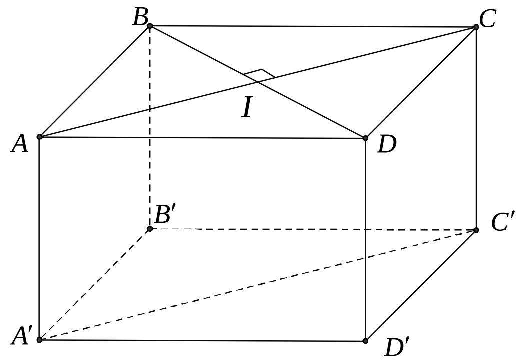
$\begin{cases} A'H \perp AD' \\ A'H \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow d(A'B'; AD') = A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn B.

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Vì $\begin{cases} (AA'C'C) \supset AC \\ (AA'C'C) // BB' \end{cases}$ nên $d(BB'; AC) = d(BB'; (AA'C'C))$.

Gọi $I = AC \cap BD$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BI \perp (AA'C'C)$.

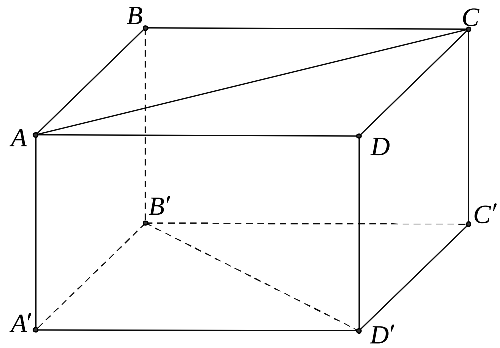
Suy ra $d(BB'; AC) = d(BB'; (AA'C'C)) = IB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 15: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 5. **D.** 8.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\begin{cases} (ABCD) // (A'B'C'D') \\ AC \subset (ABCD); B'D' \subset (A'B'C'D') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AC; B'D') = d((ABCD); (A'B'C'D')) = AA' = 5$

Chọn đáp án **C.**

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BD.

A. $\frac{ah}{\sqrt{3a^2 + h^2}}$. **B.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. **C.** $\frac{ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$. **D.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$.

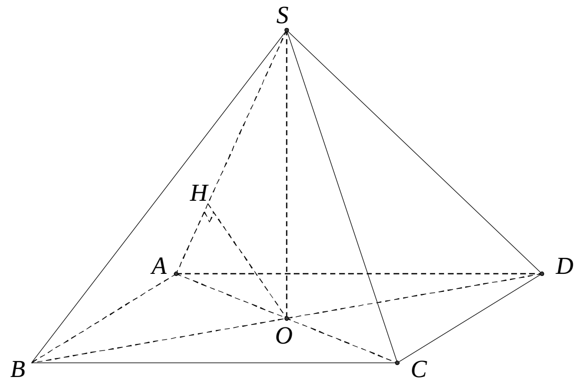
Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD$. Gọi H là hình chiếu của O lên

SA. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$. Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD, SA.

$$OH = \frac{OS.OA}{\sqrt{OS^2 + OA^2}} = \frac{a\sqrt{2}.h}{2\sqrt{\frac{2h^2 + a^2}{2}}} = \frac{ah}{\sqrt{2h^2 + a^2}}.$$

Chọn đáp án **D.**



Câu 17: Cho hai tam giác đều ABC và ABD cạnh x nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{x\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{x\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{x\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{x\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

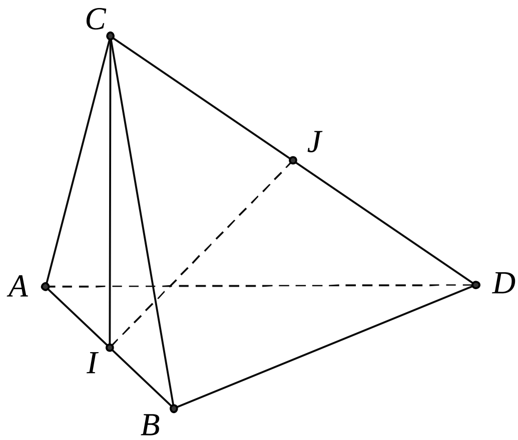
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$(ABC) \perp (ABD)$ và hai tam giác ABC và ABD đều nên $AB \perp (CDI)$ và $CI = DI$ suy ra IJ là đoạn vuông góc chung

Của hai đường thẳng AB, CD.

Vì tam giác CDI vuông tại I và J là trung điểm của CD

Nên $IJ = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{2CI^2}}{2} = \frac{\sqrt{2.\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{2} = \frac{x\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án **A.**

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa SB và CD.

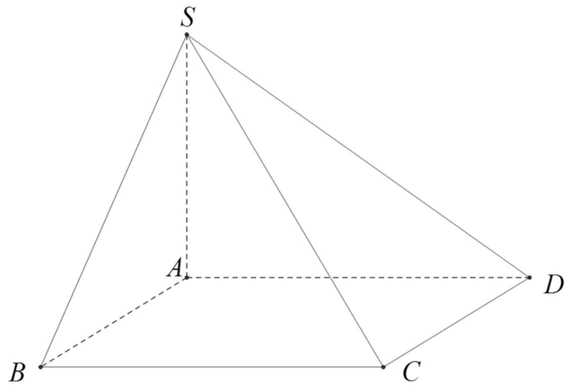
A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có

$d(SB;CD) = d(CD;(SAB)) = d(D;(SAB)) = DA = a$.

Chọn đáp án **B.**



Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa SA và BD theo a.

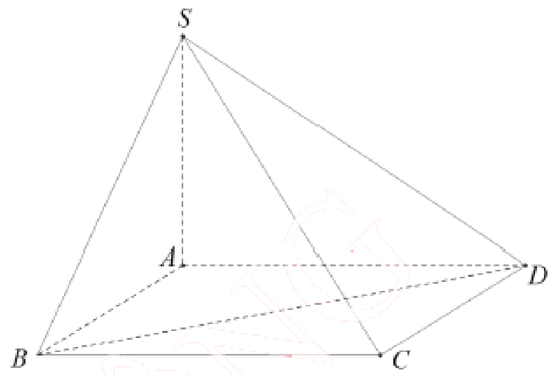
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải:

Vì $SA \perp (ABCD)$ tại A và $BD \subset (ABCD)$ nên

$$d(SA;BD) = d(A;BD) = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{5a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án **D.**



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

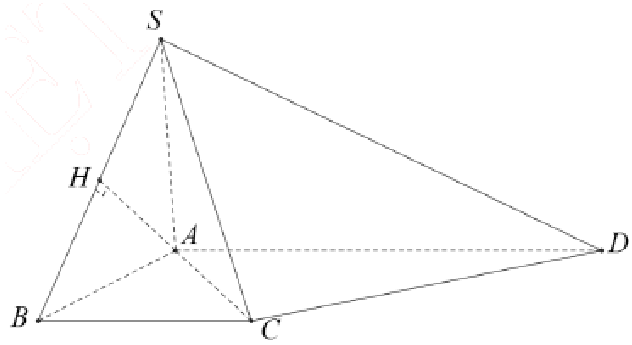
A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Vì $AD \perp (SAB)$ tại A và $SB \subset (SAB)$ nên

$$d(AD;SB) = d(A;SB) = \frac{AS.AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **D.**



Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa AD và SB là

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

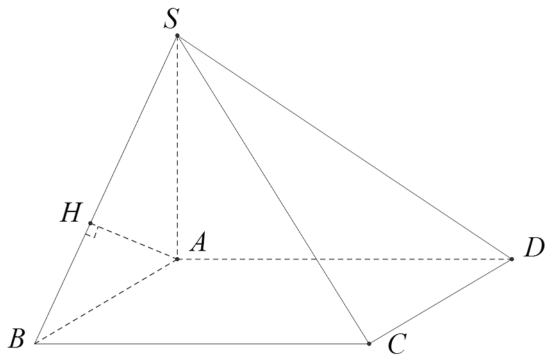
Hướng dẫn giải:

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$.

Vì $AD \perp (SAB)$ tại A và $SB \subset (SAB)$ nên

$$d(AD;SB) = d(A;SB) = AH = \frac{AS.AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

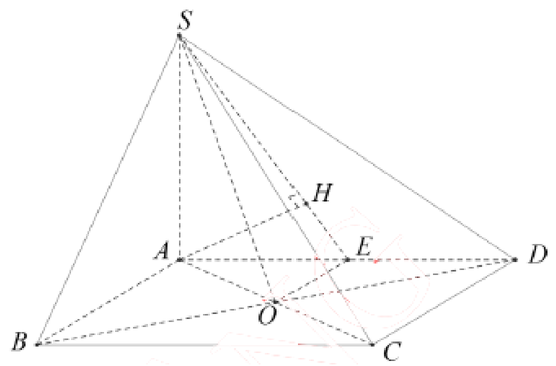
Chọn đáp án **C.**



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa SO và AB là

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi E là trung điểm của AD khi đó $d(SO;AB) = d(AB;(SOE)) = AH$, với H là hình chiếu của A lên SE.

Ta có $AH = \frac{EA.ES}{\sqrt{EA^2 + ES^2}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

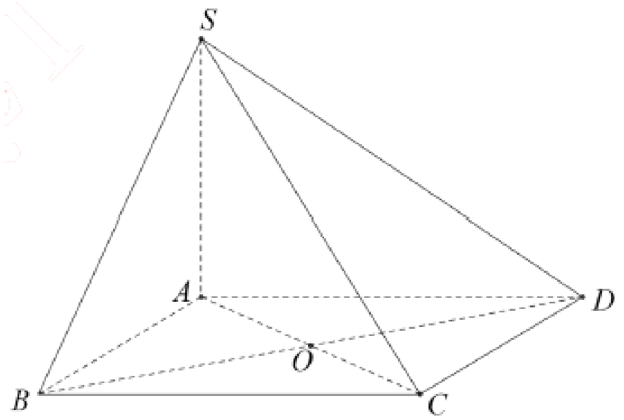
Chọn đáp án **B.**

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. độ dài của đoạn thẳng OA. **B.** độ dài của đoạn thẳng BC.

C. khoảng cách từ điểm O đến cạnh SC. **D.** khoảng cách từ điểm S đến đoạn BD.

Hướng dẫn giải:



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$ tại O, mà $SC \subset (SAC)$ nên

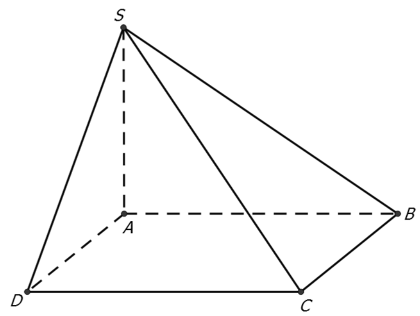
Khoảng cách giữa BD và SC bằng khoảng cách từ điểm O đến cạnh SC.

Chọn đáp án **C.**

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:



Dễ thấy $BA \perp (SAD)$

$BC // AD \Rightarrow BC // (SAD) \Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = BA$

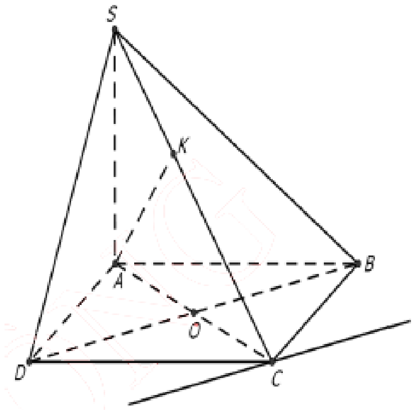
Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$

Đáp án **D**

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:



Dựng $Cx//BD$, $(\alpha)=(SC,Cx)$

$\Rightarrow BD//(\alpha)\Rightarrow d(BD,SC)=d(BD,(\alpha))$

$d(BD,(\alpha))=d(O,(\alpha))=\frac{1}{2}d(A,(\alpha))$

Dựng $AK\perp SC$. Dễ thấy $AK\perp(\alpha)\Rightarrow d(A,(\alpha))=AK$

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}\Leftrightarrow\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

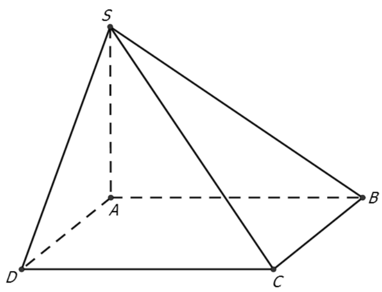
Vậy $d(O,(\alpha))=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Đáp án A.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và CD bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:



Dễ thấy $AD\perp(SAD)$

$CD//AB\Rightarrow CD//(SAB)\Rightarrow d(SB,DC)=d(CD,(SAB))=AD=a$

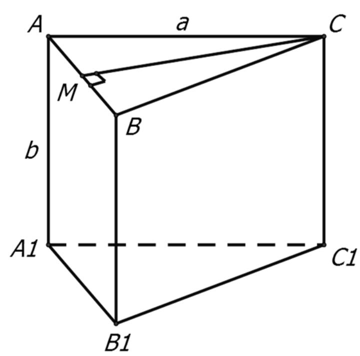
Xét tam giác vuông ABC có $AB=\sqrt{5a^2-2a^2}=a\sqrt{3}$

Đáp án **A**

Câu 27: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính khoảng cách giữa AB và CC_1.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3b^2}}$. **D.** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+2b^2}}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AB

$CC_1/AA_1\Rightarrow CC_1/(ABB_1A_1)\Rightarrow d(AB,CC_1)$

$=d(CC_1,(ABB_1A_1))=CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án **B.**

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; K là điểm bất kỳ trên AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

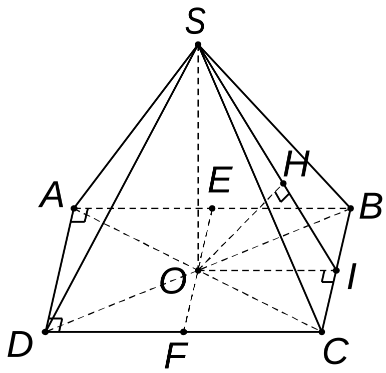
Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm cạnh đáy BC.

Do $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Từ đó ta chứng minh được $BC \perp (SOI)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC)$ (với $OH \perp BC$ tại SI)

Do $\begin{cases} EF // (SBC) \\ SK \subset (SBC) \end{cases}$ nên $d\left(EF, SK\right) = d\left(EF, (SBC)\right) = OH$



Thực hiện tính toán để được $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Cuối cùng $d\left(EF, SK\right) = OH = \frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án D.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa SM và BC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi N là trung điểm của cạnh đáy AC. Khi đó $BC // (SMN)$

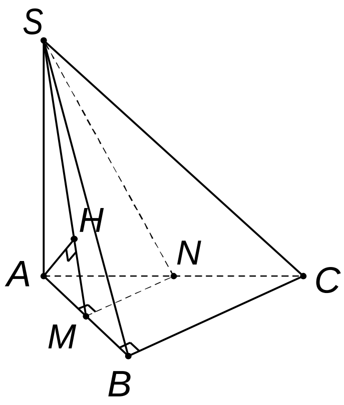
Nên $d\left(SM, BC\right) = d\left(B, (SMN)\right) = d\left(A, (SMN)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đoạn SM.

Ta có thể chứng minh được $MN \perp (SAM)$, từ đó

$AH \perp (SMN) \Rightarrow d\left(A, (SMN)\right) = AH = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án A.



Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** a **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

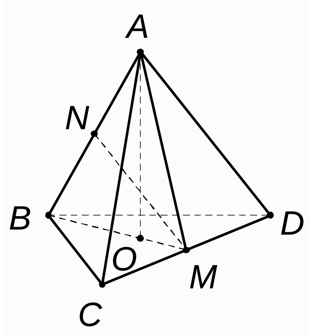
Hướng dẫn giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB

Tam giác MAB cân tại M và ΔNCD cân tại N

do đó $MN \perp AB$, $MN \perp CD$

$\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=MN=\sqrt{BM^2-NB^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

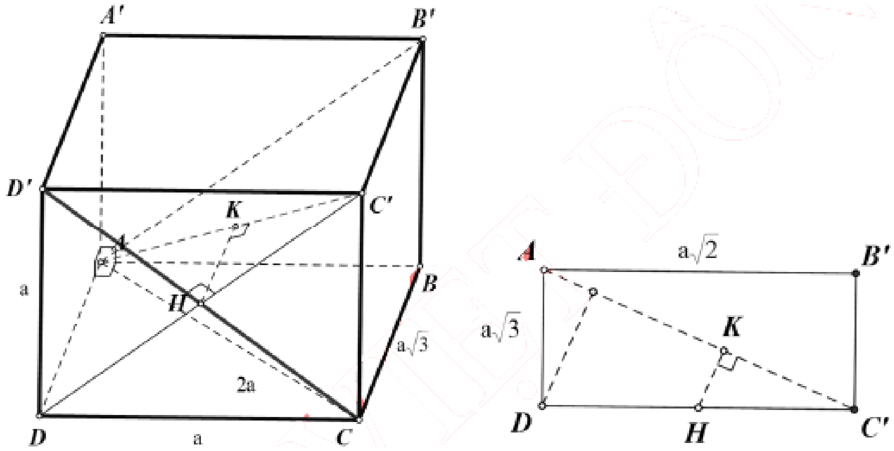


Chọn đáp án B.

Câu 31: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=a$, $AC=2a$. Tính khoảng cách giữa AC' và CD':

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải:



☑ Ta có hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $\left(DCC'D'\right)$ là $DC'\perp D'C$ nên

$AC'\perp D'C\Rightarrow\left(ADC'B'\right)\perp D'C$ tại điểm H là trung điểm CD'. Từ H ta kẻ

$HK\perp AC'\Rightarrow d\left(AC',D'C\right)=HK$.

☑ Ta có $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{5a^2}{6a^4}\Rightarrow d=\sqrt{\frac{6}{5}}a=\frac{\sqrt{30}}{5}a\Rightarrow HK=\frac{\sqrt{30}}{10}a$

Chọn đáp án D.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvd). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

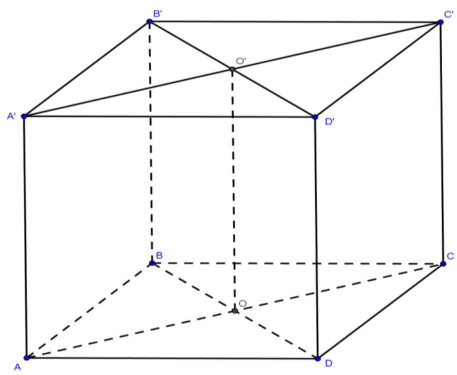
A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

$AA'//BB'\Rightarrow AA'//(DBB'D')$

Ta có :

$\Rightarrow d(AA')=d\left(A,(DBB'D')\right)=AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Câu 33: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a là :

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

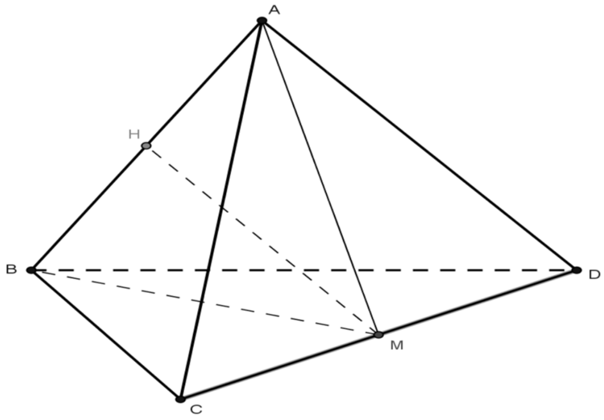
Hướng dẫn giải:

□ Gọi M là trung điểm DC, H là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

□ Ta có: $\begin{cases} BM \perp CD \\ AM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (\mathrm{ABM})$

□ $\begin{cases} CD \perp MH \\ AB \perp MH \end{cases} \Rightarrow MH = d(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$

□ $MH = \dfrac{2S_{ABM}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Chọn đáp án D.

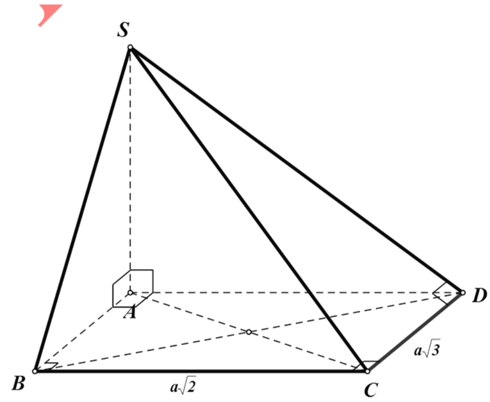
Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{2}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

☑ Khoảng cách giữa SD và BC: $d\left(BC, SD\right) = CD = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D.



Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là:

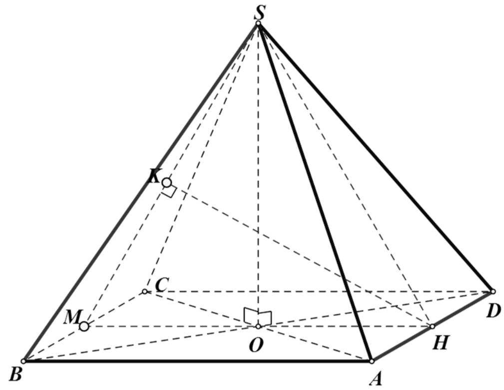
A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là: HK.

☑ $SH = SM = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}; SO = \sqrt{\dfrac{7a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

☑ Có : $HK = \dfrac{SO.MH}{SM} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{6}}{2}.a}{a\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

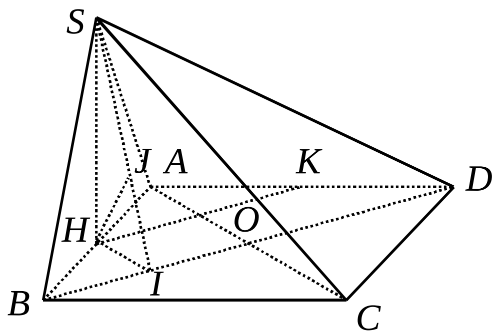


Chọn đáp án C.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a.

A. $\frac{3a}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $HK//BD \Rightarrow HK//(SBD)$

$\Rightarrow d(HK,SD)=d(HK,(SBD))=d(H,(SBD))$

Kẻ $HI\perp BD$, $HJ\perp SI$

Khi đó: $BD\perp HI$, $BD\perp SH \Rightarrow BD\perp(SHI)\Rightarrow BD\perp HJ$

Nên $HJ\perp(SBD)\Rightarrow d(H,(SBD))=HJ$

Ta có: $HI=\frac{1}{2}AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và

$HD^2=HA^2+AD^2=\frac{5}{4}a^2\Rightarrow SH^2=SD^2-HD^2=3a^2$

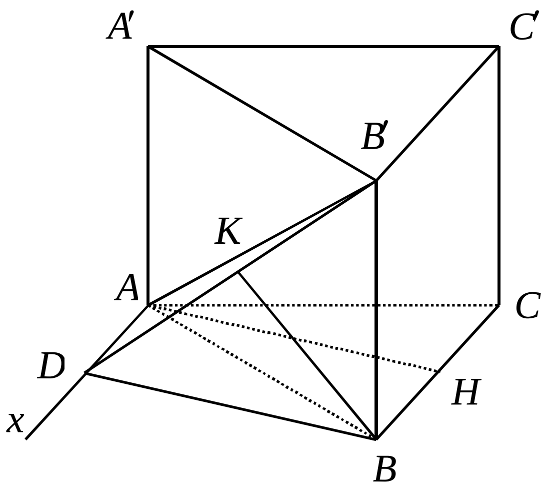
Do đó: $HJ^2=\frac{SH^2.HI^2}{SH^2+HI^2}=\frac{3}{7}a^2\Rightarrow HJ=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d(SD,HK)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án **C.**

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=AC=b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. b. **B.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. **C.** $b\sqrt{3}$. **D.** $\frac{b\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ $Ax//BC\Rightarrow BC//(AB'x)$

$\Rightarrow d(BC,AB')=d(BC,(AB'x))=d(B,(AB'x))$

Kẻ $BD\perp Ax, BK\perp DB'$

Ta có: $AD\perp BD, AD\perp BB'\Rightarrow AD\perp(BDB')$

$\Rightarrow AD\perp BK$. Do đó: $BK\perp(ADB')\Rightarrow d(B,(ADB'))=BK$

Khi đó: $BD=AH=\frac{b\sqrt{2}}{2}$

Nên $BK^2=\frac{BD^2.BB'^2}{BD^2+BB'^2}=\frac{b\sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án **D.**

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA,CD theo a bằng:

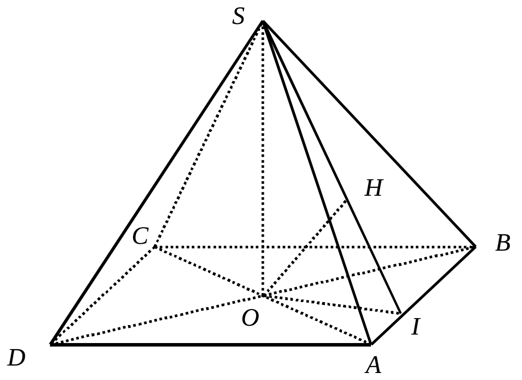
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $OI \perp AB$, $OH \perp SI$

Ta có: $(SAC) \perp (ABCD), (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Ta lại có: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow \widehat{SAO} = 30^0$



Khi đó: $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB))$

Ta có: $AB \perp SO, AB \perp OI \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

Nên $OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$

Mà $OC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{OCD} = 60^0 \Rightarrow OI = OC.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

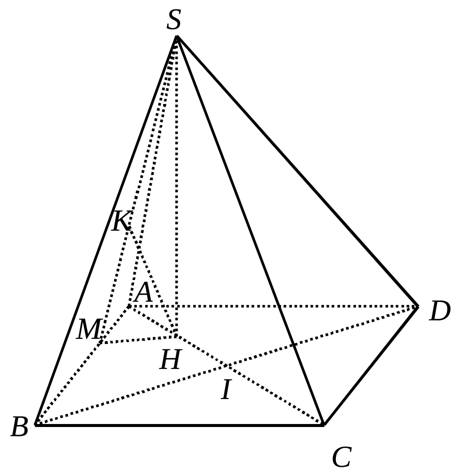
Do đó: $OH = OI.\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow d(CD, SA) = 2OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Chọn đáp án **B.**

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, $AB = 2a; BD = \sqrt{3}AC$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh A, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AI. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

A. $\frac{a\sqrt{35}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{35}}{35}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB))$

Kẻ $MH \perp AB, HK \perp SM$

Ta có: $AB \perp HM, AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow HK \perp AB$

Khi đó: $HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HK$

Ta có: $\tan \widehat{BAC} = \frac{BI}{IA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow AC = 2a \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{2}a$

Mà $HM = AI.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ và $SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{15a^2}{4}$

Do đó: $HK^2 = \frac{HM^2.SH^2}{HM^2 + SH^2} = \frac{5a^2}{28} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{35}}{14} \Rightarrow d(CD, SB) = 4HK = \frac{2a\sqrt{35}}{7}$

Chọn đáp án **B.**

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a là:

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{42}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{42}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

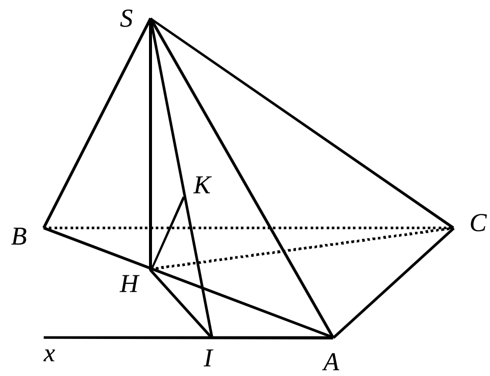
Kẻ $Ax // BC,\ HI \perp Ax,\ HK \perp SI$.

Ta có: $BC // Ax \Rightarrow BC // (SAx)$

$\Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAx)) = d(B, (SAx)) = \dfrac{3}{2} d(H, (SAx))$

Ta lại có: $AI \perp HI,\ AI \perp SH \Rightarrow AI \perp (SHI) \Rightarrow AI \perp HK$

Nên $HK \perp (SAI) \Rightarrow d(H, (SAI)) = HK$



Gọi M là trung điểm của AB

Khi đó:

$BH = \dfrac{1}{3}a,\ AH = \dfrac{2}{3}a,\ AM = \dfrac{1}{2}a, HM = \dfrac{1}{6}a, CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

và $HC = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

Mà $SH \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC lên (ABC)

nên $\widehat{SCH} = 60^0$

Suy ra $SH = HC.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Do $\widehat{ABC} = \widehat{HAI} = 60^0$ nên $HI = AH.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi đó: $HK^2 = \dfrac{HI^2.SH^2}{HI^2 + SH^2} = \dfrac{7}{24}a^2 \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(BC, SA) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

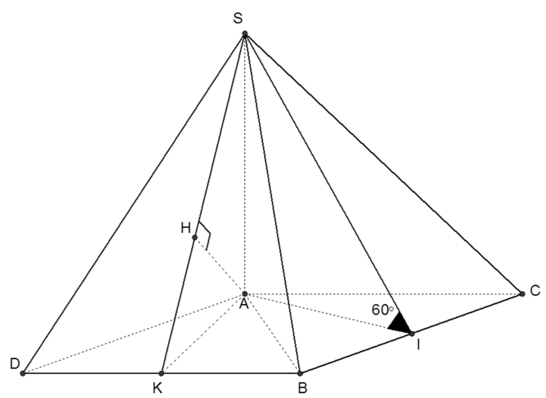
Chọn đáp án

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi I là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI nên góc giữa SI và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SIA}$ (vì tam giác SIA vuông tại A nên $\widehat{SIA}$ nhọn). Suy ra $\widehat{SIA} = 60^0$.



Xét tam giác SIA vuông tại A, $\widehat{SIA}=60^0$, $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $SA=\dfrac{3a}{2}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, tam giác ABC đều nên tam giác ABD đều.
Ta có $AC//BD, AC\not\subset(SBD)\Rightarrow AC//(SBD)$ mà $(SBD)\supset SB\Rightarrow d(AC,SB)=d(A,(SBD))$.

Gọi K là trung điểm đoạn BD, tam giác ABD đều suy ra $AK\perp BD$ và $AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ mà $BD\perp SA$ nên $BD\perp(SAK)$.

Dựng $AH\perp SK, H\in SK$ lại có $AH\perp BD$ suy ra $AH\perp(SBD)$

Vậy $d(A,(SBD))=AH$.

Xét tam giác SAK vuông tại vuông tại A, đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AS^2}\Rightarrow AH=\frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow d(AC,SB)=d(A,(SBD))=\frac{3a}{4}.$$

Đáp án **B.**

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ tam giác ABC vuông tại B, $BC=a$, $AC=2a$, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Hướng dẫn giải:

Tam giác ABC vuông tại $B, BC=a, AC=2a$ suy ra $AB=a\sqrt{3}$.

Tam giác SAM vuông tại $M, SA=a\sqrt{3}, AM=a\Rightarrow SM=a\sqrt{2}$.

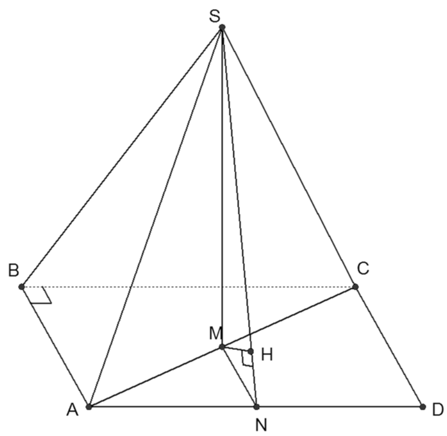
Dựng hình bình hành $ABCD$, gọi N là trung điểm của AD. Do $\widehat{ABC}=90^0$ suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật suy ra $MN\perp AD.$ Lại có $SM\perp AD$ nên $AD\perp(SMN)$.

Dựng $MH\perp SD, H\in SN$.

Theo trên có $AD\perp(SMN)\Rightarrow MH\perp AD\Rightarrow MH\perp(SAD)$.

Vậy $d(M,(SAD))=MH$.

Ta có $BC//AD, BC\not\subset(SAD)\Rightarrow BC//(SAD)$



Mà $SA\subset(SAD)$ $\begin{aligned}&\Rightarrow d(SA,BC)=d(BC,(SAD))\\&=d(C,(SAD))=2d(H,(SAD))=2MH.\end{aligned}$

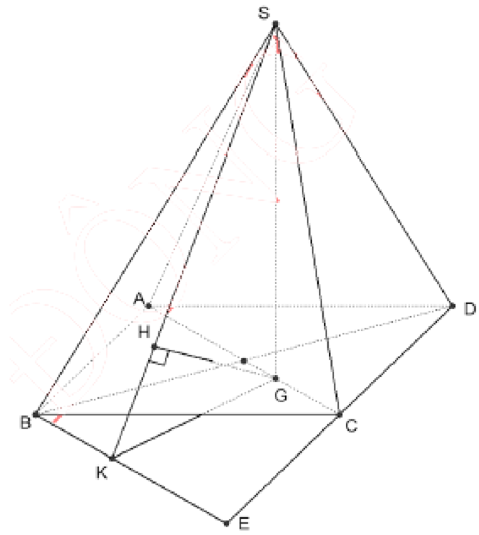
Xét tam giác SMN vuông tại M, đường cao $MH, SM=a\sqrt{2}, MN=\dfrac{a}{2}$ có

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MN^2}+\frac{1}{MS^2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{66}}{11}\Rightarrow d\left(SA,BC\right)=\frac{2a\sqrt{66}}{11}$$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB=2a$; $BC=a\sqrt{2}$; $BD=a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trọng tâm G của tam giác BCD, biết $SG=2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a là:

A. a. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có $ABCD$ là hình bình hành,
$AB=2a, BC=a\sqrt{2}, BD=a\sqrt{6}$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.
Dựng hình bình hành $ACEB$. Ta có
$AC//BE, AC\not\subset\left(SBE\right)\Rightarrow AC//\left(SBE\right)$ mà $\left(SBE\right)\supset SB$
vậy $d\left(SB,AC\right)=d\left(AC,\left(SBE\right)\right)=d\left(G,\left(SBE\right)\right)$.
Dựng $GK\perp BE, K\in BE$ lại có $SG\perp BE$ nên $BE\perp\left(SGK\right)$
.

Dựng $GH\perp SK, H\in SK$ lại có $GH\perp BE$ nên
$GH\perp\left(SBE\right)\Rightarrow d\left(G,\left(SBE\right)\right)=GH$.
Ta có $GK=d\left(B,AC\right)$. Tam giác ABC vuông tại B suy ra
$\frac{1}{d^2\left(B,AC\right)}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}$ vậy $GK=d\left(B,AC\right)=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác SGK vuông tại G, đường cao $GH, SG=2a, GK=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ có

$$\frac{1}{GH^2}=\frac{1}{GK^2}+\frac{1}{GS^2}\Rightarrow GH=a\Rightarrow d\left(SB,AC\right)=a.$$

Đáp án **A.**

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=4a$; $BC=3a$, gọi I là trung điểm của AB, hai mặt phẳng $\left(SIC\right)$ và $\left(SIB\right)$ cùng vuông góc với $\left(ABC\right)$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a là:

A. $\frac{12a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\left(SIC\right),\left(SIB\right)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ nên $SI\perp\left(ABC\right)$.

Dựng hình bình hành $ACBE$. Ta có $AC//BE, AC\not\subset\left(SBE\right)\Rightarrow AC//\left(SBE\right)$ mà $\left(SBE\right)\supset SB$ vậy

$d\left(SB,AC\right)=d\left(AC,\left(SBE\right)\right)=d\left(A,\left(SBE\right)\right)$.

$=2d\left(I,\left(SBE\right)\right)$

Dựng $IK\perp BE, K\in BE$ lại có $SI\perp BE$ nên $BE\perp\left(SGK\right)$.

Dựng $IH\perp SK, H\in SK$ lại có $IH\perp BE$ nên $IH\perp\left(SBE\right)\Rightarrow d\left(I,\left(SBE\right)\right)=IH$.

Kéo dài IK cắt AC tại D mà

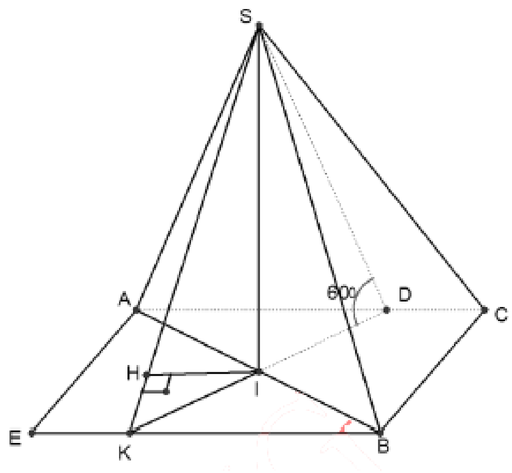
$SI \perp AC \Rightarrow (SID) \perp AC$.

Lại có $(SAC) \cap (ABC) = AC$.

$(SAD) \cap (ABC) = AD$

$(SAD) \cap (ASC) = SD$

Góc giữa (SAC) và (ABC) bằng $\widehat{SDI}$ suy ra $\widehat{SDI} = 60^0$.



Ta có $ID = IK = \frac{1}{2} d(B, AC)$

Mà tam giác ABC vuông tại B suy ra

$\frac{1}{d^2(B, AC)} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$ vậy

$ID = IK = d(B, AC) = \frac{12a}{5}$.

Xét tam giác SID vuông tại I, $ID = \frac{12a}{5}, \widehat{SDI} = 60^0$ suy ra $SI = \frac{12a\sqrt{3}}{5}$.

Xét tam giác SIK vuông tại I, đường cao IH có

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{IS^2} \Rightarrow IH = \frac{6a\sqrt{3}}{5} \Rightarrow d(SB, AC) = \frac{12a\sqrt{3}}{5}$.

Đã sửa đáp án **A.**

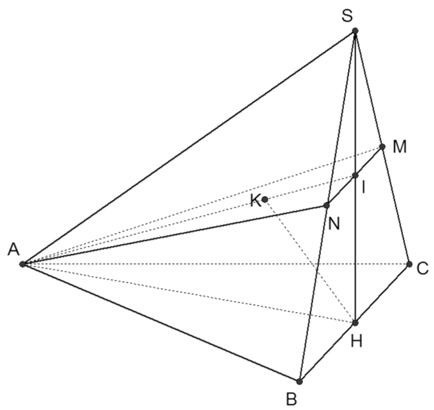
Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A. Gọi H, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC, SH vuông góc với (ABC), $SA = 2a$ và tạo với mặt đáy góc 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC) là HA.

Vậy góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$. Ta có $\widehat{SAH} = 60^0$ suy ra

$AH = a, SH = a\sqrt{3}$.



Gọi N, I lần lượt là trung điểm của SB, SI.

Ta có mặt phẳng (AMN) song song với BC và chứa AM. Vậy

$d(AM, BC) = d(BC, (SAM)) = d(H, (SAM))$.

Dựng $HK \perp AI, K \in AI$.

Ta có $BC \perp SH, BC \perp MH \Rightarrow BC \perp (SMH)$.

$\Rightarrow BC \perp HK$ mà $MN // BC \Rightarrow HK \perp MN$

Do $HK \perp AI$ (cách dựng). Suy ra

$HK \perp (AMN) \Rightarrow d(H, (AMN)) = HK$.

Xét tam giác IAH vuông tại H, đường cao HK

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$, $d(H, (AMN)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

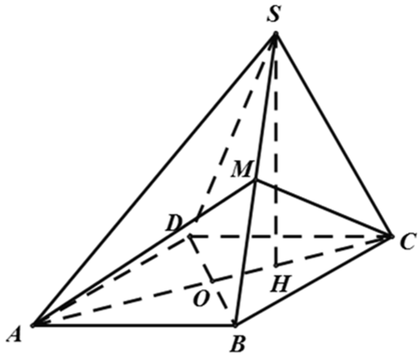
Đáp án **C.**

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a là:

A. $\frac{2a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi M là trung điểm của SB.

Mặt phẳng (ACM) chứa AC và song song SD.

Do đó $d(SD,AC)=d(SD,(ACM))=d(D,(ACM))$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó $A(0;0;0),B(a;0;0),D\left(0;2\sqrt{2}a;0\right),S\left(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a\right),C\left(a;2\sqrt{2}a;0\right)$

$M\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$. $\overrightarrow{AC}=\left(a;2\sqrt{2}a;0\right),\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(2\sqrt{2}a^2;-a^2;-\sqrt{2}a^2\right)$

Mặt phẳng (ACM) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n}=\left(2\sqrt{2};-1;-\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình là

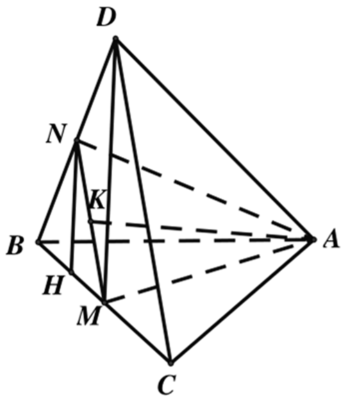
$2\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}z=0\Rightarrow d(D;(ACM))=\frac{\left|-2\sqrt{2}a\right|}{\sqrt{8+1+2}}=\frac{2a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC$, tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Ngoài ra DBC là tam giác vuông. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CD, với M là trung điểm của BC.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi N là trung điểm BD. Ta chứng minh được $CD//(AMN)$.

Do đó $d\left(CD,AM\right)=d\left(CD,(AMN)\right)=d\left(C,(AMN)\right)$.

Xét tứ diện $ACMN$. Thể tích tứ diện này là :

$V_{ACMN}=\frac{1}{3}d\left(C,(AMN)\right).S_{\Delta AMN}=\frac{1}{3}d\left(N,(ACM)\right).S_{\Delta ACM}$

Suy ra $d\left(C,(AMN)\right)=\frac{d\left(N,(ACM)\right).S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta AMN}}$ (*)

Gọi H là trung điểm BM. Khi đó, $NH//DM$ suy ra $NH\perp(ACM)$ nên

$NH=d\left(N,(ACM)\right)=\frac{1}{2}DM=\frac{1}{2}a.$ (1)

$S_{\Delta ACM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$ (2)

Áp dụng công thức trung tuyến $AN^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AD^2-\frac{1}{2}DB^2\right)=a^2\Rightarrow AN=a.$

Ta có $AM=\frac{1}{2}BC=a$ nên ΔAMN cân tại A. Gọi K là trung điểm MN thì $AK\perp MN$.

$MN=\frac{CD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trong tam giác vuông ΔAKM , ta có $AK=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Suy ra $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AK.MN=\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$.   (3)

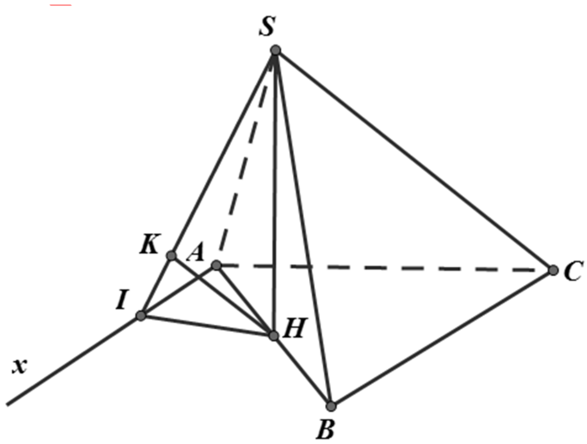
Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $d\left(C,\left(AMN\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d\left(CD,AM\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu của S mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của cạnh AB. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{2\sqrt{15}}{5}a$.   **B.** $\frac{\sqrt{3}}{5}a$.   **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}a$.   **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: Từ A Kẻ Ax song song với BC .Từ H kẻ $HI\perp Ax$.Từ H Kẻ $KH\perp SI$ với SI thì: $d\left(SA,BC\right)=d\left(B,\left(SAx\right)\right)=2d\left(H,\left(SAx\right)\right)=2HK$

$IH=AH.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và

$SH=AH.\tan 60^0=\frac{a}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{IH^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{15}}{10}$

$d\left(SA,BC\right)=2d\left(H,\left(SAx\right)\right)=2HK=\frac{a\sqrt{15}}{5}$

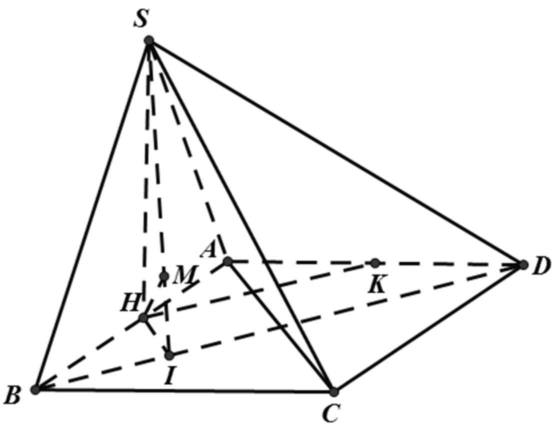
Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

A. $\frac{a}{3}$.   **B.** $\frac{2a}{3}$.   **C.** $\frac{a}{2}$.   **D.** $\frac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: SD cắt $(ABCD)$ tại D. Từ H kẻ $HI \perp BD$, $HM \perp SI$ .Ta thấy HK song song BD: $d(HK,SD) = d(H,(SBD)) = HM$



ΔSHD:

$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - (AD^2 + AH^2)} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \left(a^2 \right.}$

$IH = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{IH^2} \Rightarrow HM = \frac{a}{3}$

$d(SA,BC) = d(H,(SBD)) = HM = \frac{a}{3}$

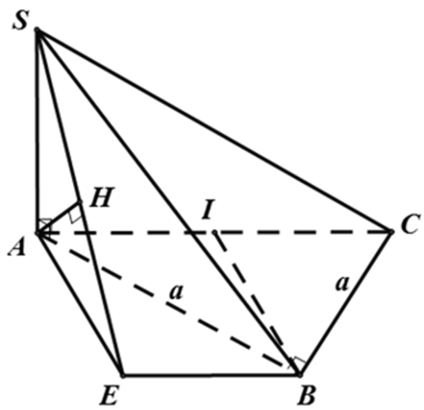
Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $2a.\frac{\sqrt{13}}{13}$. **B.** $2a.\frac{\sqrt{78}}{13}$. **C.** $a.\frac{\sqrt{13}}{13}$. **D.** $a.\frac{\sqrt{78}}{13}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi I là trung điểm của AC. Qua B kẻ đường thẳng d song song với AC, trong mặt phẳng (ABC) kẻ AE vuông góc với d tại E. Khi đó $AE \perp BE$ và $AE \perp AC$.



Ta có: $AC // BE \Rightarrow AC // (SBE) \Rightarrow d(AC,SB) = d(A,(SBE))$.

Gọi AH là đường cao của (SAE), ta có

$\begin{cases} BE \perp SA \\ BE \perp AE \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SE$ nên $AH \perp (SBE)$

Do đó $d(AC,SB) = d(A,(SBE)) = AH$

Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC) là AC suy ra gó giữa SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA} = 60^\circ$

Xét ΔSAE vuông tại A có: AH là đường cao, $SA = \tan 60^\circ.AC = \sqrt{3}.a\sqrt{2} = a\sqrt{6}$, $AE = BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{6a^2} = \frac{13}{6a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{13} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{78}}{13}$

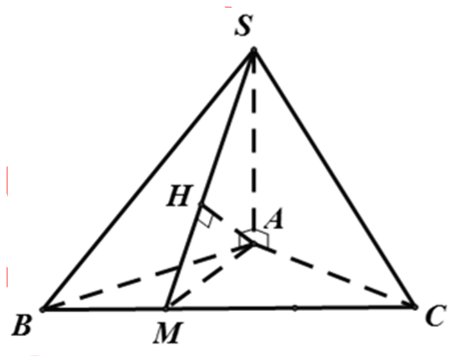
Vậy $d\left(AC,SB\right)=\dfrac{a\sqrt{78}}{13}$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABC\right)$, $SA=a\sqrt{6}$, $AB=AC=a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAC}=120^{\circ}$, lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MC=2MB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A. $\dfrac{2a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Dựa vào định lý Côsin trong tam giác ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$BC^2=3a^2+3a^2-2.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.\cos120^{\circ}$

$BC^2=9a^2\Rightarrow BC=3a$

$CM=\dfrac{2}{3}BC=2a$.

$AM^2=CM^2+CA^2-2CM.CA.\cos\widehat{MCA}$

$AM^2=4a^2+3a^2-2.2a.a\sqrt{3}.\cos30^{\circ}$

$AM^2=a^2\Rightarrow AM=a$

Xét tam giác ACM có $CM^2=AM^2+AC^2=4a^2$ nên tam giác ACM vuông tại A suy ra $AC\perp AM$ mà $AC\perp SA$ nên $AC\perp\left(SAM\right)$

Gọi H là hình chiếu của A trên SM, ta có

$\begin{cases}AH\perp AC\\AH\perp SM\end{cases}\Rightarrow d\left(AC,SM\right)=AH$

Xét tam giác SAM có $SA=a\sqrt{6}$, $AM=a$, AH là đường cao nên

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{6a^2}=\dfrac{7}{6a^2}$

$AH^2=\dfrac{6a^2}{7}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

$d\left(AC,SM\right)=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

Câu 52: Trong không gian cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với đáy, tam giác SAB vuông cân tại S. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $3a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $2a\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Kẻ $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Kẻ $BM//AC\Rightarrow AC//(SBM)\Rightarrow d(AC,SB)=d(AC,(SBM))=d(A,(SBM))=2d(H,(SBM))$.

Kẻ $HK \perp BM$, ta có: $SH \perp BM \in (ABC) \Rightarrow BM \perp (SHK)$.

Kẻ $HQ \perp SK$, ta có: $BM \perp HQ \in (SHK) \Rightarrow HQ \perp (SBM) \Rightarrow d(H,(SBM)) = HQ$.

Xét tam giác vuông SHK ta có: $\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2}$.

Trong đó: $SH = AH = \frac{a}{2}$ (do tam giác SAB vuông cân tại S), $HK = HB.\sin 60^\circ = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow \frac{1}{HQ^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HQ = \frac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow d(AC,SB) = 2HQ = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AD = a$, góc $\widehat{AOB} = 120^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì:

$\left.\begin{array}{l} BC \perp DC \\ BC \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow \widehat{SCD} = 45^\circ$

$\Rightarrow SD = DC = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = a\sqrt{3}$.

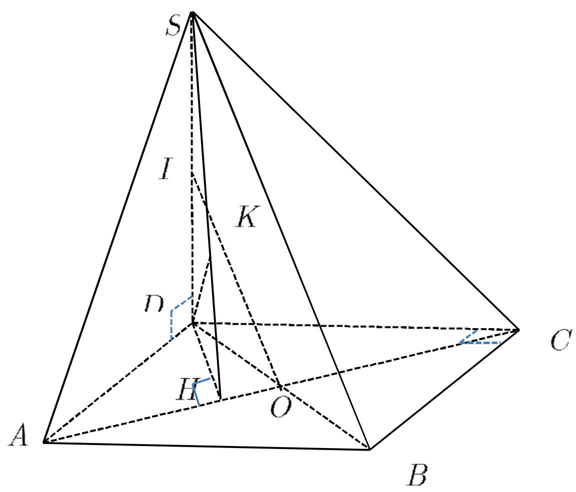
Kẻ

$OI // SB (I \in SD) \Rightarrow ID = SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SB // (IAC) \Rightarrow$

$d(AC,SB) = d(SB,(IAC)) = d(B,(IAC))$
$= d(D,(IAC))$.

Kẻ $IH \perp AC \Rightarrow AC \perp (IDH) \Rightarrow DH \perp AC$.

Kẻ $DK \perp IH$, ta có: $DK \perp AC (AC \perp (DIH))$
$\Rightarrow DK \perp (IAC) \Rightarrow d(D,(IAC)) = DK$.



Xét tam giác vuông DHA: ta có $DH = a.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác DHI vuông cân tại

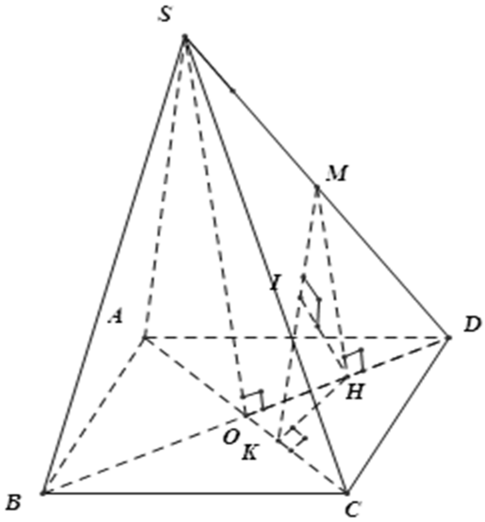
$DK = DH.\sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $BC = a\sqrt{3}$, $AB = a$; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và đường thẳng SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $(SAC)\cap(SBD)=SO,(SAC)\perp(ABCD),(SBD)\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

OC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{SCO}=60^0$

Gọi M là trung điểm của SD $\Rightarrow OM \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$

Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $MH \parallel SO \Rightarrow MH\perp(ABCD)$

Khi đó

$d(SB,AC)=d(SB,(ACM))=d(B,(ACM))=2d(H,(ACM))$.

Ta có $HK=\dfrac{1}{2}d(D,AC)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Có $OC=\dfrac{AC}{2}=a\Rightarrow SO=OC.\tan 60^0=a\sqrt{3}\Rightarrow MH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

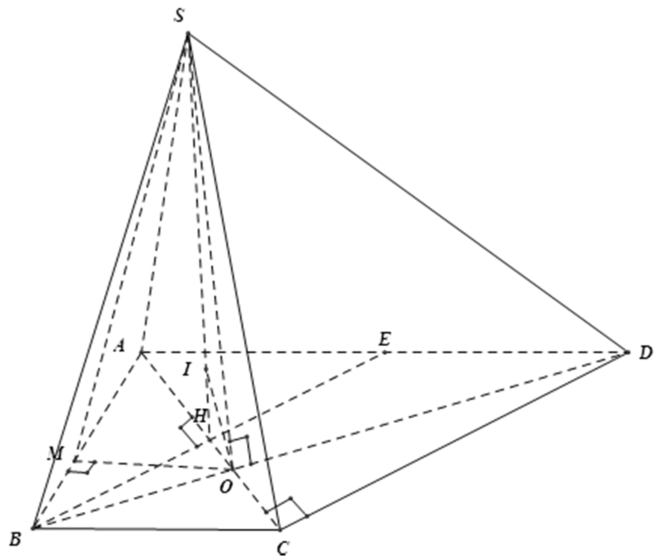
$\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{HM^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{20}{3a^2}\Rightarrow HI=\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$. Vậy $d(SB,AC)=2HI=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a,\ AD=2a$. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{array}{l}(SAC)\cap(SBD)=SO,(SAC)\perp(ABCD),\\(SBD)\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp(ABCD)\end{array}$.

Gọi E là trung điểm của AD, $H=AC\cap BE$

$\Rightarrow BE \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBE)$

$\Rightarrow d(CD,SB)=d(C,(SBE))$.

$=3d(O,(SBE))=3OI$

Kẻ $OM \perp AB, SO \perp AB \Rightarrow SM \perp AB$

$\Rightarrow ((SAB),(ABCD)) = \widehat{SMO} = 60^0$

Tính $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = \frac{1}{6}AC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$, $OM = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SO = OM.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{75}{4a^2} \Rightarrow OI = \frac{2a}{5\sqrt{3}} \Rightarrow d(CD,SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy $ABCD$ một góc 60°. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

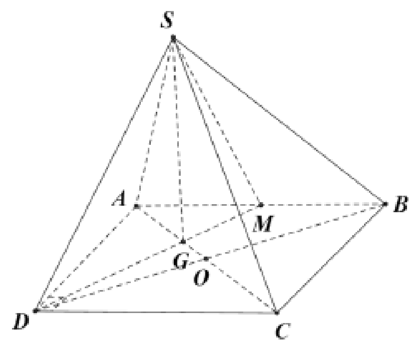
Ta có $(SMD) \cap (SAC) = SG$ suy ra $SG \perp (ABCD)$

Kẻ $GH \perp AB$, $GK \perp SH$

Khi đó,

$d(DC,SM) = d(DC,(SAB)) = d(D,(SAB))$

$= \frac{GD}{GM}.d(G,(SAB)) = 3GK = \frac{3a\sqrt{15}}{4}$



Câu 57: Một hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ và tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính khoảng cách giữa SA và BC.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

+ Vì $SABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$

(Với O là trọng tâm của ΔABC).

+ Xét ΔSOA Vuông tại O có:

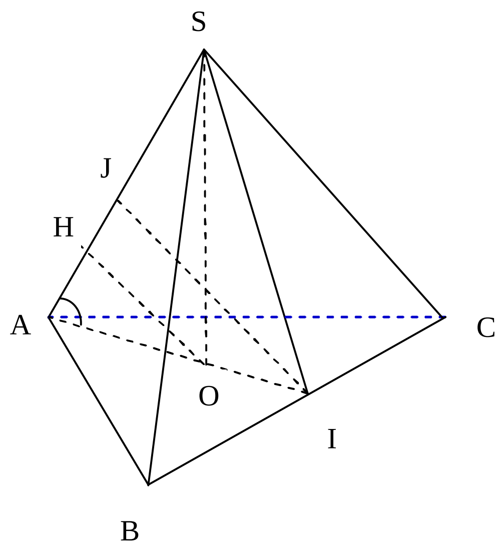
- $\widehat{SAO} = 45^0$ mà

$SA = 2\sqrt{2}$ nên $OA = SO = 2. \Rightarrow AI = 3.$

- Với H là chân đường cao hạ từ O

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \sqrt{2}.$

+ Trong ΔSIA Gọi J là chân đường cao hạ từ I xuống SA. Lại có $BC \perp (SAI)$ nên $BC \perp IJ$. Từ đó IJ là đương vuông góc chung của SA & BC.



+ Xét trong ΔAIJ : $\dfrac{OH}{IJ}=\dfrac{OA}{AI}\Rightarrow IJ=\dfrac{OH.AI}{OA}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

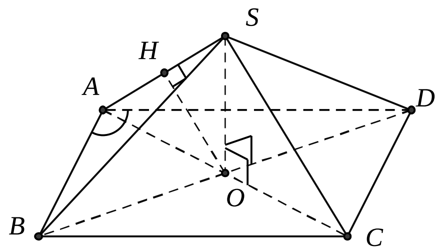
Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$ và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$. Hỏi khoảng cách giữa SA và BD bằng bao nhiêu ?

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{3a}{14}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\left.\begin{matrix} SO\perp AC \\ SO\perp DB \end{matrix}\right\}\Rightarrow SO\perp (ABCD)\ \Rightarrow DB\perp SO$

Ta có: $\left.\begin{matrix} DB\perp SO \\ BD\perp AC \end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp (SAC)$



Trong mp (SAC), kẻ $OH\perp SA\,(H\in SA)$, ta có: $OH\perp SA, OH\perp BD$

Do đó: $d(SA,DB)=OH$. Ta có:

$SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

Tam giác SOA vuông tại O, có OH là đường cao, ta có:

$OH=\dfrac{SO.OA}{SA}=\dfrac{3a}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{4}{a\sqrt{21}}=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$

Vậy $d(SA,DB)=OH=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Chọn B.

Câu 59: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đường cao $SO=2$, mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

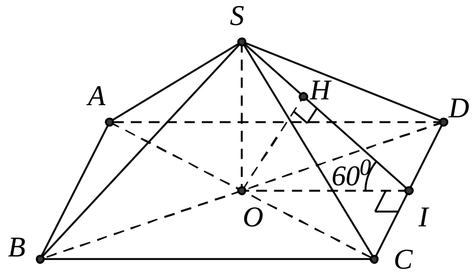
A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của CD. Ta có:

$\left.\begin{matrix} (SCD)\cap(ABCD)=CD \\ (SOI)\perp CD \\ (SOI)\cap(ABCD)=OI,(SOI)\cap(SCD)=SI \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{(OI,SI)}=60^0$



Ta có: $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SD)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))=2d(O,(SCD))$

Trong mp (SOI), kẻ $OH\perp SI$ $(H\in SI)$, ta có: $OH\perp(SCD)$ và $OI=\dfrac{SO}{\tan 60^0}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $d(O,(SCD))=OH$.

Ta có: $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{2^2+\dfrac{4}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

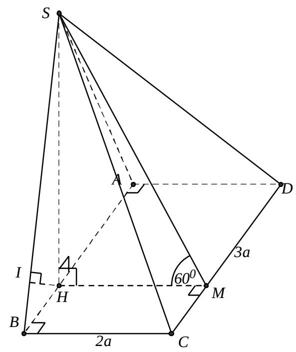
Tam giác SOI vuông tại O, có đường cao OH nên $OH = \frac{SO.OI}{SI} = 2.\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4} = 1$

Do đó: $d(AB,SD) = 2d(O,(SCD)) = 2OH = 2.1 = 2$. **Chọn B.**

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a; AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD theo a là

A. $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{6a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải:



Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $HM \perp CD (M \in CD)$, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(ABCD)\cap(SCD) = CD\\(SHM)\perp CD\\(SHM)\cap(ABCD) = HM\\(SHM)\cap(SCD) = SM\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(ABCD),(SCD)}\right) = \widehat{SMH} = 60^0$$

Ta có: $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$ và $d(AD,SC) = d(A,(SBC)) = 3d(H,(SBC))$

Kẻ $HI \perp SB\ (I \in SB)$, ta có: $HI \perp (SBC)$ và $d(H,(SBC)) = HI$

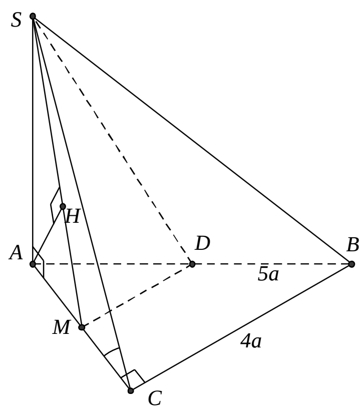
Ta có: $SH = HM.\tan 60^0 = 2a.\sqrt{3}$ và $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{13}$

Suy ra: $IH = \frac{SH.HB}{SB} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$. Vậy $d(AD,SC) = 3HI = \frac{6a\sqrt{39}}{13}$. **Chọn A.**

Câu 61: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB = 5a$; $BC = 4a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy (ABC) bằng 60°. Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC là:

A. $\frac{3a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm AC, ta có: $BC // (SMD)$

$\Rightarrow d(BC,SD) = d(C,(SMD)) = d(A,(SMD))$

Kẻ $AH \perp SM\ (H \in SM)$, ta có: $AH \perp (SMD)$

$\Rightarrow d(A,(SMD)) = AH = \frac{SA.AM}{SM} = \frac{3a\sqrt{39}}{13}$

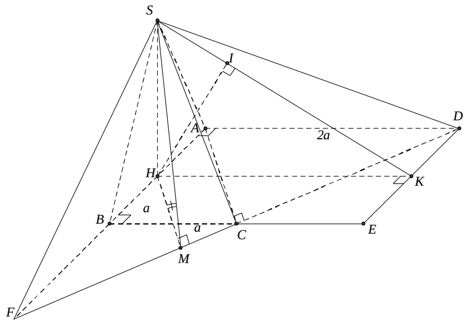
Với $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{3a\sqrt{13}}{2}$.

Chọn A.

Câu 62: hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, tam giác SAB cân tại đỉnh S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60°. Khoảng cách AB và SD là:

A. $\frac{a\sqrt{177}}{59}$. **B.** $\frac{6a\sqrt{177}}{59}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{177}}{59}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{177}}{59}$.

Hướng dẫn giải:



Dựng hình chữ nhật $ABED$, ta có tam giác ACD vuông cân tại C.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB, ED, ta có: $SH \perp (ABCD)$.

Gọi F là đối xứng của A qua B, kẻ $HM \perp DF$ $(M \in DF)$

Suy ra: $(SHM) \perp DF$ và $\widehat{(SCD),(ABCD)} = \widehat{SMH} = 60^0$

Ta có: $HM // AC \Rightarrow HM = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Ta có: $AB // ED \Rightarrow AB // (SED)$ và $d(AB, SD) = d(H, (SED))$

Kẻ $HI \perp SK$, ta có: $HI \perp (SED)$ và $d(H, (SED)) = HI$

Ta có: $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \frac{a\sqrt{59}}{2\sqrt{2}}$

Suy ra: $HI = \frac{SI.IK}{SK} = \frac{6a\sqrt{3}}{\sqrt{59}} = \frac{6a\sqrt{177}}{59}$.

Chọn B.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$, M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC là:

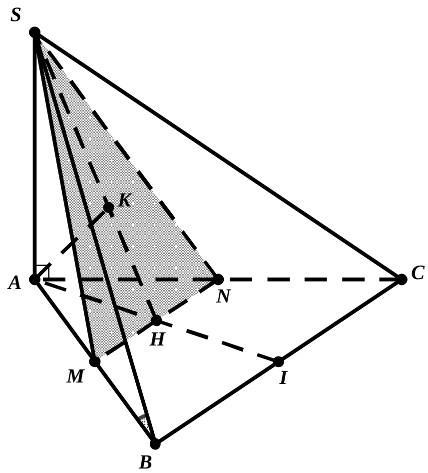
A. $\frac{4a\sqrt{51}}{51}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{51}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{51}}{51}$. **D.** $\frac{a\sqrt{51}}{17}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi N, I lần lượt là trung điểm của AC, BC.

MN là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow MN$€ BC

$\Rightarrow BC$€ (SMN)



Ta có: $d(BC; SM) = d(BC; (SMN)) = d(I; (SMN))$

$= d(A; (SMN))$.

Dễ thấy

$BC \perp (SAI) \Rightarrow MN \perp (SAI) \Rightarrow (SMN) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SH

.

Trong mặt phẳng (SAI) kẻ $AK \perp SH$ $\Rightarrow AK \perp (SMN)$

Vậy $d(BC; SM) = d(A; (SMN)) = AK$

Ta có: $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SB; (ABC)) = (SB; AB) = \widehat{SBA} = 60°$ $\Rightarrow SA = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}.$

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{17}{3a^2}$

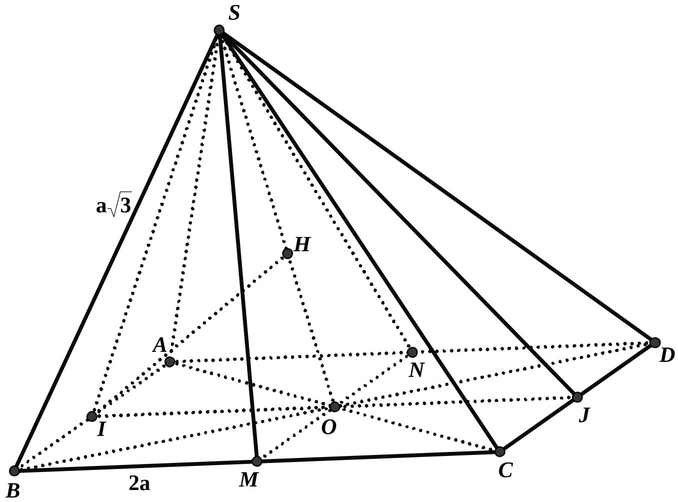
$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{51}}{17}$.

Câu 64: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều, SI vuông góc với (SCD) và I là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và AB là:

A. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $MN//AB$

$\Rightarrow d\left(SO,AB\right)=d\left(AB,\left(SMN\right)\right)=d\left(I,\left(SMN\right)\right)$



Ta có

$AB\perp SI\Rightarrow MN\perp SI, AB\perp OI\Rightarrow MN\perp OI$

$\Rightarrow MN\perp(SOI)\Rightarrow\left(SMN\right)\perp\left(SOI\right)$.Kẻ

$IH\perp SO\Rightarrow IH\perp\left(SMN\right)$

$\Rightarrow IH=d\left(I;\left(SMN\right)\right)$

Gọi J là trung điểm của CD

Do $SI\perp\left(SCD\right)\Rightarrow SI\perp SJ \Rightarrow SO=\frac{JI}{2}=a$

+ Do ΔSIO cân tại O. kẻ $OE\perp SI$

$\Rightarrow OE=\sqrt{OI^2-IE^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}$

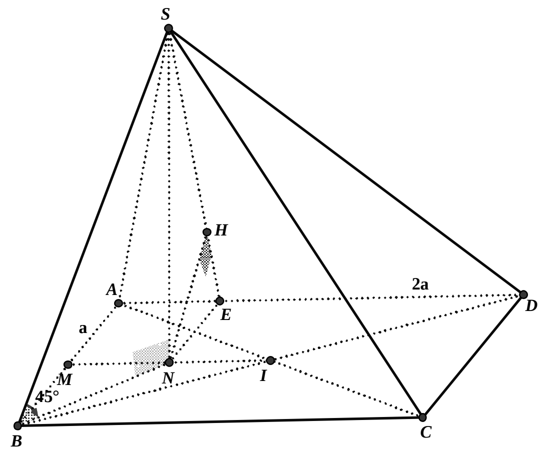
+ $S_{\Delta OSI}=\frac{1}{2}OE.SI=\frac{1}{2}\frac{a}{2}.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow IH=\frac{2S_{\Delta OSI}}{SO}\Rightarrow IH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB=a$, $AD=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là trung điểm đoạn MI. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với điểm N. Biết góc tạo bởi đường thẳng SB với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SD theo a là:

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Do $MN//AD\Rightarrow MN//\left(SAD\right)\Rightarrow d\left(MN,SD\right)$
$=d(MN,(SAD))=d(N,(SAD))$



Kẻ

$NE\perp AD, SN\perp AD\Rightarrow AD\perp\left(SNE\right)\Rightarrow\left(SAD\right)\perp\left(SNE\right)$

Kẻ $NH\perp SE\Rightarrow NH\perp(SAD)$
$\Rightarrow d\left(N,\left(SAD\right)\right)=d\left(MN,\left(SAD\right)\right)=NH$

Ta có : $\widehat{SB;\left(ABCD\right)}=\widehat{SBN}=45^0$

Xét $\Delta BMN\Rightarrow$

$BN=\sqrt{BM^2+NM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $NH=\dfrac{NE.NS}{\sqrt{NE^2+NS^2}}=\dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 66: hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB=BC=a$; $AD=2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.　**B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{11}$.　**C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$.　**D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SCA}=45^0$

Gọi E,K lần lượt là giao điểm của AC với BD,NM

Kẻ $MN//BD\Rightarrow BD//(SMN)\Rightarrow d(SM,BD)=d(BD,(SMN))=d(E,(SMN))$

Do $MN//BD\Rightarrow K$ trung điểm $AE\Rightarrow d(E;(SMN))=d(A,(SMN))$

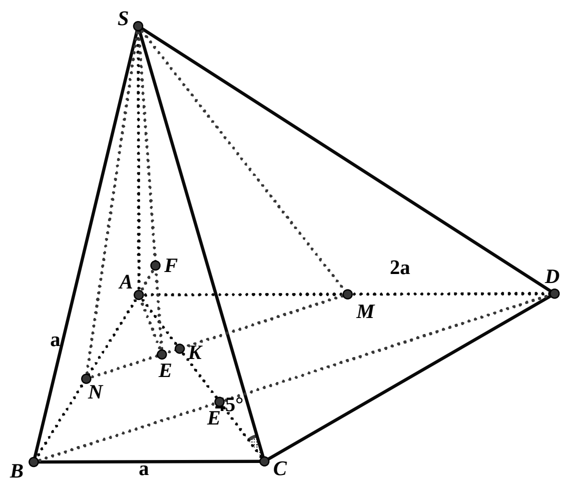
Kẻ $AE\perp MN, SA\perp MN\Rightarrow MN\perp(SAE)\Rightarrow(SAE)\perp(SMN)$

Kẻ $AF\perp SE\Rightarrow FA\perp(SMN)\Rightarrow d(A,(SMN))=FA$

Xét $\Delta ABC\Rightarrow AC=a\sqrt{2}\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$

$$AE=\frac{AN.AM}{\sqrt{AN^2+AM^2}}=\frac{\frac{a}{2}.a}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$FA=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{55}}{5}}=\frac{a\sqrt{22}}{11}$$



Câu 67: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, $SG\perp(ABCD)$ và $SG=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng AB và SM theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.　**B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.　**C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.　**D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:

Gọi J,K lần lượt là hình chiếu của H lên DC,SJ

$$d(AB,SM)=d(AB,(SDC))=d(A,(SDC))=\frac{3}{2}d(G,(SDC))$$

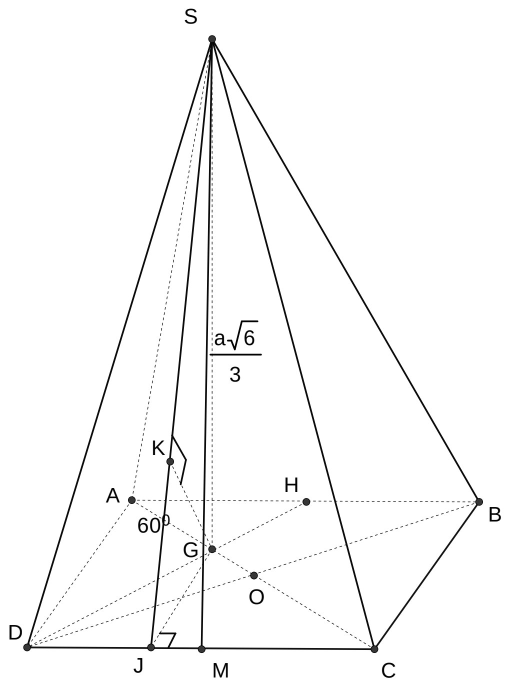
$$=\frac{3}{2}GK=\frac{3}{2}.\frac{SG.GJ}{SJ}=\frac{3}{2}.\frac{SG.GC.\sin\widehat{GCJ}}{\sqrt{SG^2+GJ^2}}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{SG.GC.\sin\widehat{GCJ}}{\sqrt{SG^2+\left(GC.\sin\widehat{GCJ}\right)^2}}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.AC.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}.AC.\sin 30^0\right)^2}}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.2\,AO.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}.2\,AO.\sin 30^0\right)^2}}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}.2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 30^0\right)^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA=a$ và cạnh bên SB tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

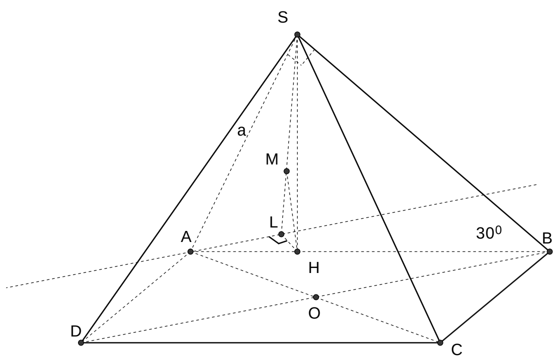
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có:

Vẽ đường thẳng d qua A và song song với AC

Gọi L, M lần lượt là hình chiếu của H lên d, SL



$$d(SA,BD)=d(BD,(SAL))=d(B,(SAL))$$

$$=\frac{BA}{HA}.d(H,(SAL))=\frac{BA}{HA}.HM$$

$$=\frac{BA}{HA}.\frac{SH.HL}{SL}=\frac{BA}{HA}.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}.$$

$$=\frac{\frac{a}{\sin 30^0}}{a.\cos 60^0}.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}=4.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}\ \sin 60^0=\frac{SH}{SA}\Rightarrow SH=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\widehat{LAH}=\frac{HL}{AH}\Leftrightarrow\sin\widehat{ABO}=\frac{HL}{AH}$$

$$\cos 60^0=\frac{AH}{SA}\Rightarrow AH=\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO}{AB}=\frac{HL}{AH}\Leftrightarrow HL=\frac{AO.AH}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}AH=\frac{\sqrt{2}}{4}a\ 4.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}=4.\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{4}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$$

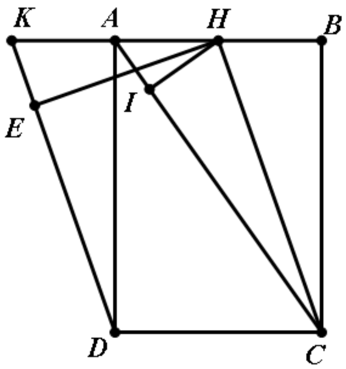
Câu 69: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB ; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CH và SD là :

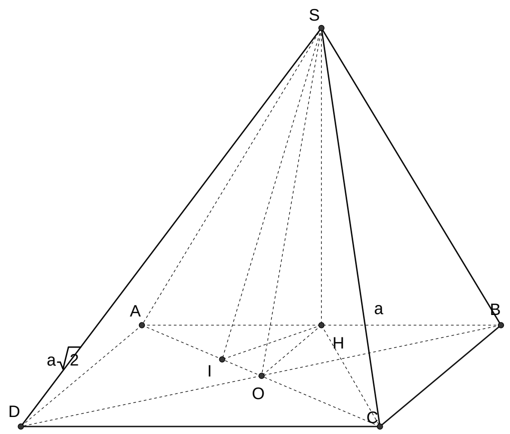
A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.   **B.** $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$.   **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.   **D.** $\frac{2a\sqrt{2}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì H là trung điểm của cạnh AB ; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH\perp(ABCD)$.





Gọi I là hình chiếu của H trên AC suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$là góc $\widehat{SIH}=60^0$.

Ta có $\Delta ABC\sim\Delta AIH\Rightarrow\frac{IH}{AH}=\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow IH=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}.\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong ΔSHI vuông tại H có $SH=IH\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi K là điểm đối xứng của H qua A ta có tứ giác CDKH là hình bình hành suy ra CH song song với mặt phẳng $(SDK)\supset SD$.

Nên ta có: $d(CH,SD)=d(CH,(SDK))=d(H,(SDK))$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên DK và SE. Khi đó ta có $d(H,(SDK))=HF$.

Ta có $HE=2d(B,HC)=2\frac{BH.BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=2\frac{\frac{a}{2}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Trong ΔSHE vuông tại H có $HF=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{8a^2}{9}}}=\dfrac{2a^2}{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{5a}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{5}$. Chọn **D.**

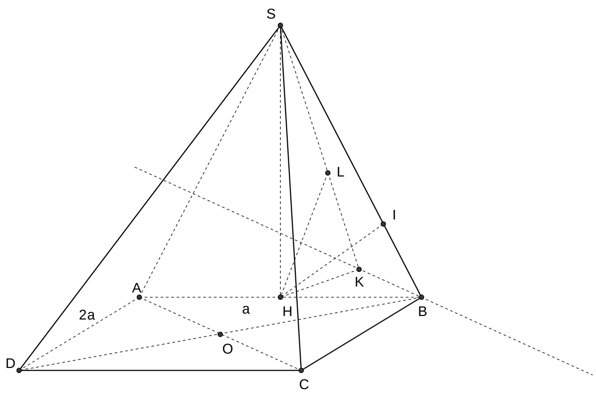
Câu 70: hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ D đến (SBC) bằng $\dfrac{2a}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là :

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:



Vẽ đường thẳng d qua A và song song với AC

Gọi K,I lần lượt là hình chiếu của H lên d, SK

$d\left(D,(SBC)\right)=\dfrac{2a}{3}\Leftrightarrow d\left(A,(SBc)\right)=\dfrac{2a}{3}$

$\Leftrightarrow d\left(H,(SBC)\right)=\dfrac{a}{3}\Leftrightarrow HI=\dfrac{a}{3}$

$\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HB^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{a^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{4}{a^2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{5}{a^2}\Leftrightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

$\sin\widehat{KBH}=\dfrac{HK}{HB}\Leftrightarrow \sin\widehat{CAB}=\dfrac{HK}{HB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{CB}{AC}=\dfrac{HK}{HB}\Rightarrow HK=\dfrac{HB.CB}{AC}=\dfrac{\dfrac{a}{2}.2a}{\sqrt{5}.a}=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$

$d\left(AC,SB\right)=d\left(A,(SBK)\right)=2d\left(H,(SBK)\right)=2HL$

$=2\dfrac{SH.HK}{SK}=2\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=2.\dfrac{SH^2}{SH\sqrt{2}}=2\dfrac{SH}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, có $SH\perp(ABC)$ với H thuộc cạnh AB sao cho $AB=3AH$. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:

Vẽ đường thẳng d qua A và song song với BC
Gọi F, G lần lượt là hình chiếu của H lên d, SF

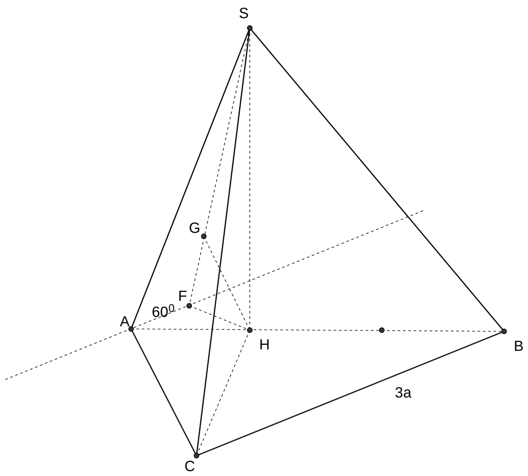
$\tan 60^0 = \frac{SH}{a} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

$\sin \widehat{FAH} = \frac{HF}{AH} \Leftrightarrow \sin 60^0 = \frac{HF}{a} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$HG = \frac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$

$d(BC, SA) = d(B, (SAF))$

$= 3d(H, (SAF)) = 3HG = 3\frac{\sqrt{15}}{5}a$



Câu 72: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60°. Gọi M là trung điểm của DC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM là :

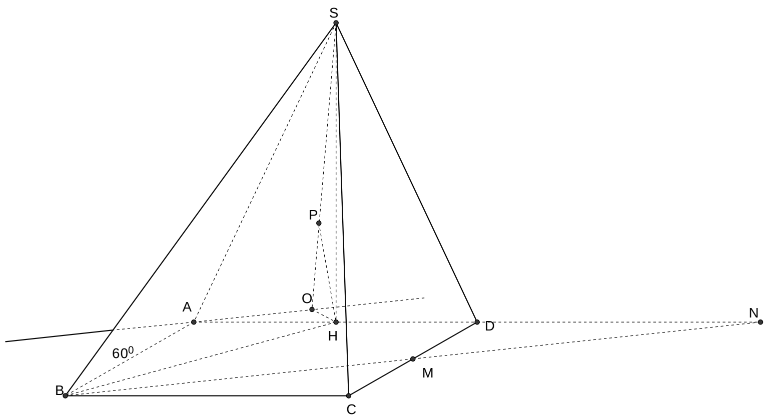
A. $\frac{a\sqrt{285}}{9}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{285}}{19}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{285}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Vẽ đường thẳng d qua A và song song với BM
Gọi O, P lần lượt là hình chiếu của H lên d, SO
Ta có:

$BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$



$\tan 60^0 = \frac{SH}{BH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

$\sin \widehat{OAH} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow \sin \widehat{MBC} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow OH = \frac{CM.AH}{BM} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{5}}{10}a$

$SO = \sqrt{SH^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}a}{5}$

$d(SA, BM) = d(N, (SAO)) = 4d(H, (SAO)) = 4HP = 4.\frac{SH.OH}{SO} = 4.\frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{95}a}{5}} = \frac{\sqrt{285}}{19}a$